Compléments au TD2 Exercices 2-3

2 octobre 2026

Dans la feuille de TD2, exercices 2 et 3, il faut calculer des intégrales du type :

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux polynômes non nuls en x vérifiant que $\deg(P) \leq \deg(Q)$.

En pratique, pour l'intégrer, il faut tout d'abord factoriser $Q(x)$ comme le produit de polynômes *irréductibles*, qui sont forcément (à un coefficient près) de la forme suivante :

— $x - a$ avec $a \in \mathbb{R}$;

— $x^2 - ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $\Delta = a^2 - 4b < 0$. Ce polynôme ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$ et s'écrit encore comme

$$x^2 - ax + b = (x - \tfrac{a}{2})^2 - \Delta.$$

1 Interpolation de Lagrange

Supposons pour simplicité que $\deg(Q) = 3$. Alors $Q(x)$ est parmi les formes suivantes :

1. $Q(x)$ n'a que des racines simples : $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)$ avec $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ deux-à-deux distincts ;
2. $Q(x)$ a une racine simple et une racine double : $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)^2$ avec $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ distincts ;
3. $Q(x)$ a une racine triple : $Q(x) = (x - a_1)^3$ avec $a_1 \in \mathbb{R}$;
4. $Q(x)$ admet un facteur de degrée "non factorisable" : $Q(x) = (x - a_1)(x^2 - a_2 x + b_2)$ avec $\Delta_2 = a_2^2 - 4b < 0$.

Si $\deg(Q) > 3$, il y aura plus de combinaisons possibles [1].

D'après le *théorème d'interpolation de Lagrange* (qui est valable en générale en tous les degrés) nous dit que si $\deg(P) < \deg(Q)$, on peut toujours décomposer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ comme la somme de fractions simples, i.e. de fractions dont le dénominateur est une puissance de $x - a$ ou $x^2 - ax + b$.

Plus concrètement lorsque $\deg(Q) = 3$ (donc $\deg(P) \leq 2$), dans chacun des cas discutés ci-dessus on a donc :

1. Si $\deg(Q) = 4$, on pourrait aussi avoir $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x^2 - a_3 x + b_3)$ ou $Q(x) = (x - a_1)(x - a_1)^2(x^2 - a_2 x + b_2)$.

1. Si $Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$ avec $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ deux-à-deux distincts, alors
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a_1} + \frac{B}{x-a_2} + \frac{C}{x-a_3};$$
2. Si $Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)^2$ avec $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ distincts, alors
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a_1} + \frac{B}{x-a_2} + \frac{C}{(x-a_2)^2};$$
3. Si $Q(x) = (x-a_1)^3$ avec $a_1 \in \mathbb{R}$, alors
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a_1} + \frac{B}{(x-a_1)^2} + \frac{C}{(x-a_1)^3};$$
4. Si $Q(x) = (x-a_1)(x^2 - a_2x + b_2)$ avec $\Delta_2 = a_2^2 - 4b < 0$, alors
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a_1} + \frac{BX+C}{x^2-a_2x+b}.$$

L'intégration de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ peut alors se faire de façon élémentaire, sauf peut-être celle du type $\int \frac{Bx+C}{x^2-a_2x+b}dx$, que nous allons expliquer ci-dessous.

2 Intégrale du type $\int \frac{Bx+C}{x^2-ax+b}dx$

Distinguons d'abord deux cas :
$$\int \frac{1}{x^2-ax+b}dx, \qquad \int \frac{2x-a}{x^2-ax+b}dx.$$

Pour le premier intégrale, posons $\Delta = a^2 - 4b < 0$ comme avant, et écrivons :
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-ax+b}dx &= \int \frac{1}{(x-\frac{a}{2})^2 - \Delta}dx \\ &= \frac{1}{-\Delta}\int \frac{1}{(\frac{x-\frac{a}{2}}{\sqrt{-\Delta}})^2+1}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\arctan(\frac{x-\frac{a}{2}}{\sqrt{-\Delta}}) + \text{constante}.\end{aligned}$$

Pour le deuxième, remarquons que :
$$\begin{aligned}\int \frac{2x-a}{x^2-ax+b}dx &= \int \frac{(x^2-ax+b)'}{x^2-ax+b}dx \\ &= \ln(x^2-ax+b) + \text{constante}.\end{aligned}$$

Finalement, en combinant les deux, on obtient :
$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{x^2-ax+b}dx &= \int \frac{\frac{B}{2}(2x-a)+\frac{Ba}{2}+C}{x^2-ax+b}dx \\ &= \frac{B}{2}\int \frac{2x-a}{x^2-ax+b}dx + (\frac{Ba}{2}+C)\int \frac{1}{x^2-ax+b}dx \\ &= \frac{B}{2}\ln(x^2-ax+b) + (\frac{Ba}{2}+C)\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\arctan(\frac{x-\frac{a}{2}}{\sqrt{-\Delta}}) + \text{constante}.\end{aligned}$$