Durée : 15 minutes. Aucun document autorisé.

Ce contrôle sera noté sur **20 points**.

Correction : Corrigé en rouge (peut-être indication toute seule).

Commentaires : Commentaire en bleu.

1. (4 pts) Calculer la limite en utilisant les développements limités :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x) - 3\ln(1+x)}{x^2}.$$

Correction : D'après le DL, l'expression dans la limite s'écrit comme

$$\frac{(3x - \frac{(3x)^2}{2} + o(x^2)) - 3(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x^2} = \frac{-3x^2 + o(x^2)}{x^2},$$

donc sa limite en $x \to 0$ vaut -3.

2. (8 pts) Étudier l'existence et déterminer la valeur éventuelle de la limite en $(0,0)$ de la fonction

$$f(x,y) = \frac{xy^4 \sin(y)}{x^4 + y^6}.$$

Correction : Observons la majoration $|\sin(y)| \leq |y|$, donc :

$$|f(x,y)| = \frac{|xy^4 \sin(y)|}{x^4 + y^6} \leq \frac{|xy^5|}{x^4 + y^6}.$$

En faisant le changement de variables $x = r^{1/4}\cos\theta$ et $y = r^{1/6}\sin\theta$, on obtient

$$\frac{|xy^5|}{x^4 + y^6} = r^{1/12} \frac{|\cos\theta \sin^5\theta|}{\cos^4\theta + \sin^6\theta}.$$

Comme $\frac{1}{12} > 0$, le facteur $r^{1/12}$ tend vers 0 lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$; le facteur en θ est une fonction continue sur l'intervalle compact $[0, 2\pi]$ donc elle y est majorée. Donc leur produit $f(x,y)$ tend vers 0.

3. (8 pts) Déterminer l'équation du plan tangent au graphe en $A = (0,1)$ pour la fonction suivante :

$$f(x,y) = \sqrt{1 + x^3 + y^3} + e^{\sin(x)y}.$$

Correction : L'équation du plan tangent au graphe de $f(x,y)$ au point $(x_0, y_0) = (0,1)$ est donnée par la formule

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0).$$

Valeur de la fonction au point $A = (0,1)$:

$$f(0,1) = \sqrt{1 + 0^3 + 1^3} + e^{\sin(0)\cdot 1} = \sqrt{2} + e^0 = \sqrt{2} + 1.$$

Derivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3+y^3}} + y\cos(x)e^{\sin(x)y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^2}{2\sqrt{1+x^3+y^3}} + \sin(x)e^{\sin(x)y}$$

En $A = (0,1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \frac{0}{2\sqrt{2}} + 1\cdot\cos(0)\cdot e^0 = 0+1 = 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \frac{3(1)^2}{2\sqrt{1+0+1}} + \sin(0)\cdot e^0 = \frac{3}{2\sqrt{2}} + 0 = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Donc l'équation du plan tangent :

$$z = (\sqrt{2}+1) + 1\cdot(x-0) + \frac{3}{2\sqrt{2}}(y-1),$$

ou également sous la forme développée :

$$z = x + \frac{3}{2\sqrt{2}}y + 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Fin du corrigé.