

PROJET SCIENTIFIQUE COLLECTIF

Entiers algébriques totalement dans un compact

3 septembre 2019

Marc Fersztand, Benjamin Gourevitch, Arnaud Rippol
Rubing Shen, Ian-Christopher Tanoh, Yicheng Zhou



REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier, d'abord et avant tout, notre tuteur de PSC Javier Fresán. Ce projet ne pourrait pas exister sans Javier, sans son implication, sa disponibilité, sa bonne humeur et ses conseils toujours pertinents. Le plus important peut-être, c'est grâce à lui que nous avons pu expérimenter le plaisir d'étudier les mathématiques pendant ce projet.

Nous voudrions également remercier notre coordinateur Stéphane Bijakowski pour sa bienveillance et ses remarques constructives sur notre travail.

TABLE DES MATIÈRES

0.1 Motivation . . . 4
0.2 Plan du mémoire . . . 5

1 Observations élémentaires 6
1.1 Premiers résultats . . . 6
1.2 Composante algorithmique . . . 7
1.2.1 Principe de l'algorithme . . . 7
1.2.2 Résultats . . . 8
1.3 Deux cas élémentaires : $\mathbb{U}$ et $[-2,2]$ . . . 11
1.3.1 $K = \mathbb{U}$: Théorème de Kronecker . . . 11
1.3.2 $K = [-2,2]$ . . . 12

2 Théorie des capacités 15
2.1 Diamètre transfini, points de Fekete . . . 15
2.2 Passage au continu : mesure d'équilibre et capacité logarithmique . . . 19
2.3 Potentiels et fonctions semi-harmoniques . . . 27
2.3.1 Théorème de Frostman . . . 27
2.3.2 Calcul de capacité . . . 30
2.4 Constante de Tchebychev . . . 34

3 Théorème de Fekete. Théorème de Fekete-Szegö 39
3.1 Théorème de Fekete . . . 39
3.2 Théorème de Fekete-Szegö . . . 40

4 Théorème de Robinson 44
4.1 Quelques notions sur les courbes algébriques . . . 44
4.1.1 Courbe algébrique : cas affine . . . 45
4.1.2 Diviseurs . . . 45
4.1.3 Une compactification naïve . . . 46
4.1.4 Interlude : recollement de deux courbes algébriques affines . . . 46
4.1.5 Compactification lisse . . . 47
4.1.6 Courbes hyperelliptiques et équation de Pell-Abel . . . 49
4.1.7 Un exemple visuel . . . 50
4.2 Démonstration du théorème de Robinson . . . 52
4.2.1 Cas de Pell-Abel . . . 52
4.2.2 Démonstration de la proposition 4.5 dans le cas $g = 0$ . . . 53
4.2.3 Démonstration de la proposition 4.5 pour $g > 0$ . . . 55
4.2.4 Fin de la démonstration du théorème de Robinson . . . 58
4.2.5 Ramener le cas général au cas de Pell-Abel . . . 60

A Éléments de théorie de la mesure 63
A.1 Mesures . . . 63
A.2 Convergence faible-$*$ . . . 64
A.3 Fonctions semi-continues inférieurement . . . 66

B Fonctions semi-harmoniques 68

C Rassemblement des démonstrations techniques 71
C.1 Démonstration de la proposition 2.6 . . . 71
C.2 Démonstration du théorème 2.8 . . . 73

PRÉAMBULE

0.1 Motivation

Depuis le XIXème siècle, la recherche en arithmétique utilise des outils provenant d'autres domaines des mathématiques, avec un succès et une efficacité surprenants. L'une des branches créées par cette diversification est la géométrie arithmétique, qui combine algèbre et géométrie pour résoudre des problèmes de théorie des nombres. On pourra trouver dans [1] une description rapide des succès de cette rencontre.

Un des objets d'étude majeurs de cette science est le comportement d'objets géométriques (par exemple, les « courbes ») définis sur des corps finis. Les « courbes » sont définies rigoureusement comme le lieu d'annulation d'un certain nombre de polynômes à plusieurs variables à coefficients dans le corps fini considéré. Par exemple, la première bissectrice est le lieu d'annulation du polynôme $P(X,Y) = X - Y$. Un corps fini est un ensemble fini muni d'une loi additive pour laquelle tout élément admet un opposé, et d'une loi multiplicative telle que tout élément non nul ait un inverse. On peut penser au corps $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, avec p un nombre premier, ainsi qu'aux extensions $\mathbb{F}_{p^n}$ obtenues en lui rajoutant la racine d'un polynôme irréductible de degré n.

Une des propriétés remarquables des courbes est qu'on peut leur associer un groupe abélien dans lequel il est possible, en un sens convenable, de « faire la somme » de deux points sur la courbe et trouver un « opposé » à chaque point. Ces groupes, qu'on appelle des *variétés abéliennes*, présentent un grand intérêt et constituent encore un pôle actif de la recherche en mathématiques, avec de nombreux résultats [2][3].

Pour étudier les courbes sur les corps finis, une technique classique consiste à étudier l'action de morphismes (i.e. des fonctions compatibles avec la structure algébrique) sur celles-ci. On peut par exemple s'intéresser au morphisme de Frobenius Fr qui élève les coordonnées d'un point de la courbe à la puissance p, où p est la caractéristique du corps fini (le plus petit entier tel que $p.1 = 0$). En algèbre général, l'étude du morphisme de Frobenius permet de déduire de nombreuses propriétés de l'ensemble sur lequel il agit, il est donc naturel de vouloir l'étudier dans le cas qui nous occupe. Notamment, comme $x^p = x$ pour tout $x \in \mathbb{F}_p$, le nombre de points fixes du morphisme de Frobenius est le nombre de points de la courbe à coordonnées dans $\mathbb{F}_p$. De même, les points fixes de Fr^n sont les points de la courbe dont les coordonnées appartiennent à $\mathbb{F}_{p^n}$.

On peut alors former la série génératrice $\exp(\sum_{n\geq 1} N_n \frac{T^n}{n})$, où N_n est le nombre de points de la courbe à coordonnées dans $\mathbb{F}_{p^n}$. D'après les conjectures de Weil [4], cette série de puissances est en fait une fonction rationnelle et, plus précisément, un quotient $P(T)/(1-T)(1-pT)$ avec $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire à coefficients entiers. Il s'agit du polynôme caractéristique de Fr agissant, pas sur la courbe comme précédemment, mais sur la variété abélienne qui lui est associée. Les valeurs propres de ce morphisme de Frobenius sont donc des entiers algébriques qui, d'après la troisième des conjectures de Weil (« hypothèse de Riemann sur les corps finis »), ont tous valeur absolue inférieure ou égale à $2g\sqrt{p}$, où g est la dimension de la variété abélienne en question. Ils sont en particulier tous inclus dans un même ensemble compact (i.e. fermé et borné) K du plan complexe. Les racines d'un polynôme ayant cette propriété sont appelées *entiers algébriques totalement inclus dans* K. Bien sûr, tous les polynômes unitaires ayant cette propriété ne sont pas associés à des morphismes de Frobenius, mais la compréhension de ce type de polynôme éclaircit le comportement du morphisme de Frobenius.

Par conséquent, une question naturelle est d'étudier la répartition de ces valeurs propres, qui découle de celle des entiers algébriques totalement dans un compact. Cette répartition se déduit du cas où le compact K est un segment réel, cas étudié par Robinson qui a montré en 1962 le résultat suivant : si la longueur de K est strictement supérieure à 4, alors il existe un nombre infini d'entiers totalement algébriques dans K, si la longueur est strictement inférieure à 4, il en existe un nombre fini. La situation où la longueur vaut exactement 4 est – à l'heure actuelle – seulement résolue dans quelques exemples particuliers. L'objet de notre mémoire est la démonstration de ce théorème.

0.2 Plan du mémoire

De façon formelle, les *entiers algébriques* sont les nombres complexes qui sont racines d'un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On appelle $\mathbb{Q}$-conjugués d'un entier algébrique α les racines du polynôme unitaire à coefficients rationnels de degré minimal qui annule α. Étant donnée une partie compacte K de $\mathbb{C}$, on dit qu'un entier algébrique est *totalement dans* K si tous ses $\mathbb{Q}$-conjugués appartiennent à K. On appelle *degré d'un entier algébrique* le degré de son polynôme minimal.

L'étude de la répartition des entiers algébriques totalement dans un segment réel a commencé au début du XXème siècle, avec un premier résultat dû à Schur en 1918 qui traite le cas des segments de longueur strictement inférieure à 4, suivront de nombreux résultats intermédiaires, puis, 40 ans plus tard, Robinson démontre enfin son théorème complet.

La démonstration que l'on va donner ici du théorème de Robinson suit un article de Serre [5] qui résume une conférence donnée au séminaire Bourbaki en mars 2018. Notre mémoire se veut accessible à une personne n'étant pas spécialiste des domaines abordés, mais à l'aise avec les concepts mathématiques de base de l'algèbre (groupes, manipulation des polynômes), de la topologie (convergence faible) et de l'analyse (continuité, analyse complexe de base). Il nous semble qu'un public de niveau L3 peut bénéficier de ce document et suivre (sans voir forcément toutes les subtilités techniques) la démonstration que nous allons donner. Le lecteur intéressé trouvera en annexe des compléments sur la théorie de la mesure, sur des points subtils d'analyse utilisés au cours du raisonnement, et des démonstrations jugées trop techniques et sans intérêt vital pour la compréhension des concepts en jeu.

Dans la première partie (Observations élémentaires), on donnera les premières remarques sur ce problème, qui amèneront à des pistes de preuve, ou montreront au contraire que certaines tentatives de preuve sont vouées à l'échec. On y présentera également une approche algorithmique qui permet de se forger une intuition du résultat (bien que la complexité du programme présenté soit trop importante pour énumérer un nombre significatif de degrés de polynômes). Enfin, on montrera un théorème dû à Kronecker (1857) qui traite le cas où le compact considéré est le cercle unité et duquel on peut déduire le cas du segment $[-2, 2]$, et plus généralement, de tous les segments de la forme $[n-2, n+2]$, où $n \in \mathbb{Z}$.

Dans une deuxième partie, on s'intéressera à la théorie de la capacité qui est le cadre naturel de la mesure de la « taille » d'un compact pour le problème posé. Cette notion de capacité est intimement liée aux problèmes de théorie de la mesure, et certains résultats obtenus dans cette partie permettent – une fois combinés avec les résultats de la dernière partie – d'obtenir un résultat légèrement plus fort que celui de Robinson sur la répartition des entiers totalement algébriques dans un compact, notamment la convergence d'une sous-suite de polynômes au sens des mesures vers la mesure d'équilibre de l'ensemble considéré.

On démontrera ensuite en troisième partie le théorème 3.1 de Fekete qui donne le cas où le segment est de longueur inférieure strictement à 4, puis, le théorème de 3.3 Fekete-Szegö qui est l'équivalent complexe du théorème de Robinson. On verra alors que la preuve de ce résultat ne peut se transposer directement au cas réel, mais que certaines idées peuvent être reprises pour résoudre ce dernier, ce qui le rend très intéressant à étudier.

Enfin, dans une dernière partie, on abordera la démonstration proprement dite du théorème 4.3 de Robinson qui passe par l'utilisation des courbes algébriques. On donnera donc une rapide introduction aux principes fondamentaux de la théorie des courbes algébriques, puis, on appliquera les résultats obtenus dans tout le document afin de prouver le théorème de Robinson.

1
OBSERVATIONS ÉLÉMENTAIRES

Commençons par rappeler la définition de l'objet de notre étude : les entiers algébriques totalement dans un compact.

Définition 1.1 (i) Un *entier algébrique* est un nombre complexe qui est une racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers.

(ii) Étant donné un entier algébrique $\zeta \in \mathbb{C}$, on appelle *polynôme minimal de* ζ l'unique polynôme unitaire à coefficients entiers de degré minimal parmi ceux ayant ζ comme racine.

(iii) On note $\mathrm{Gal}(\zeta)$ l'ensemble des racines du polynôme minimal de ζ.

(iv) Soient E un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ et ζ un entier algébrique. On dit que $\zeta \in \mathbb{C}$ est *totalement dans* E si $\mathrm{Gal}(\zeta) \subset E$.

1.1 Premiers résultats

Dans cette première section, on va commencer par énoncer trois remarques "élémentaires" sur le problème posé : d'abord, à degré fixé, il n'y a qu'un nombre fini d'entiers algébriques, ensuite, les polynômes dérivés des polynômes minimaux des entiers totalement algébriques dans un compact présentent des propriétés intéressantes, et enfin, si l'on a deux compacts $K_1 \subset K_2$, on peut comparer le nombre d'entiers algébriques totalement dans K_1 et K_2.

Remarque 1.1 Soit K un compact quelconque inclus dans $\mathbb{C}$. Soit P un polynôme unitaire de degré n dont toutes les racines sont dans K, on peut majorer le k-ième coefficient de P par $\sup(K)^k \binom{n}{k}$. Cela nous assure qu'à degré fixé, il existe un nombre fini de tels polynômes ayant leurs racines dans K, et donc un nombre fini d'entiers totalement algébriques de degré n dans K.

Cette remarque donne plusieurs pistes intéressantes :

— On peut trouver (informatiquement éventuellement) les polynômes qui conviennent au moins pour de petits degrés.

— Si l'on veut montrer qu'il existe un nombre fini d'entiers algébriques totalement dans un compact, il suffit de montrer que le degré d'un tel nombre est borné.

Remarque 1.2 Si on prend un polynôme unitaire P à coefficients entiers dont les racines sont des entiers algébriques totalement dans un compact K, où P est de degré plus grand que 2, sa dérivée n'est pas un polynôme unitaire. Cependant c'est encore un polynôme à coefficients entiers, et ses racines sont toujours dans le compact K si celui-ci est convexe (ce qui est le cas pour les segments réels). En effet, le théorème de Gauss-Lucas assure que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P (pour le prouver, il suffit de décomposer P'/P en éléments simples, de multiplier les termes de la somme obtenue par le conjugué du dénominateur, au numérateur et au dénominateur, puis de regrouper les termes de façon idoine).

On voit que cette remarque impose des conditions sur les racines de P si l'on connaît P', cette information sera utile lorsque l'on voudra calculer informatiquement les entiers algébriques totalement dans un compact.

Remarque 1.3 Si l'on a deux compacts $K_1 \subset K_2$, alors il y a au moins autant d'entiers algébriques totalement dans K_2 que dans K_1 (puisque tout entier algébrique totalement dans K_1 est un entier algébrique totalement dans K_2). Cette remarque apparemment très simple sera utile dans certaines démonstrations pour lesquelles il est plus facile de travailler sur un compact plus petit, mais plus "simple" que le compact que l'on veut considérer.

1.2 Composante algorithmique

Pour se forger une intuition sur les entiers algébriques totalement dans un compact, nous avons décidé d'imaginer et d'implémenter un algorithme listant les entiers algébriques totalement dans un segment dont le polynôme minimal est de degré fixé. Ces résultats pourront dans un deuxième temps être comparés aux théorèmes démontrés.

Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Nous avons retenu deux questions pouvant faire l'objet d'expériences numériques :

— Quels sont les entiers algébriques totalement dans K ? Nous nous intéresserons en particulier à la répartition de ces nombres. Les résultats pourront être comparés aux cas particuliers traités dans la partie 1.3. Cette question paraît difficile car elle nécessite une connaissance fine des entiers algébriques totalement dans K. C'est pourquoi la question centrale de notre mémoire est en fait la suivante :

— Y a-t-il un nombre infini d'entiers algébriques totalement dans K ? Les résultats obtenus ici pourront être comparé aux résultats des sections 3 et 4.

Dans un premier temps nous exposerons le principe des algorithmes que nous avons écrits puis dans un second temps nous commenterons les résultats obtenus.

1.2.1 • Principe de l'algorithme

Pour pouvoir obtenir des résultats numériques, on se limite aux polynômes unitaires à coefficients entiers dont le degré est inférieur à un certain entier n fixé. L'objectif est de trouver une liste aussi restreinte que possible contenant tous les polynômes minimaux de degré au plus n des entiers algébriques totalement dans le compact K.

La remarque 1.1 permet de borner les coefficients d'un polynôme de degré fixé ayant toutes ses racines dans K. Ainsi, si l'on fixe le degré, on peut énumérer (informatiquement) les polynômes susceptibles d'être le polynôme minimal d'un entier algébrique totalement dans K :

Algorithm 1 Algorithme naïf

```
l liste vide
for all P polynôme unitaire de degré au plus n à coefficients entiers inférieurs aux bornes de la remarque 1.1 do
  if les racines de P sont totalement dans K then
    ajouter les racines de P à l
  end if
end for
return l
```

Cependant cette méthode n'est pas très efficace. En effet, la complexité est supérieure au produit du double des bornes :

$$\prod_{k=1}^{n}(2\sup(K))^k\binom{n}{k}C(n) \geqslant (2\sup(K))^{n^2/2},$$

où $C(n)$ est la complexité d'un calcul de racines d'un polynôme de degré n (effectué dans notre cas en calculant les valeurs propres de la matrice compagnon). Par exemple, lorsque le compact K est un segment inclus dans [-2.5,2.5], cet algorithme ne permet d'énumérer que les entiers algébriques totalement dans K dont le polynôme minimal est de degré au plus $n = 4$. Ces données ne sont malheureusement pas suffisantes pour faire des conjectures intéressantes.

Comme dans ce mémoire nous nous intéressons principalement au cas des segments, nous avons donc créé un second algorithme spécifique pour les segments de $\mathbb{R}$. Dans ce cas, la remarque 1.2 permet d'obtenir un gain en efficacité considérable. En effet, lorsque K est un segment de $\mathbb{R}$, pour tout entier algébrique totalement dans K, son polynôme minimal a toutes ses dérivées scindées à racines simples dans K. Plus généralement, soit $l < n-1$, considérons les polynômes de la forme : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où les $n-l-1$ plus grands coefficients $a_{l+1}, \ldots, a_{n-1}$ sont fixés et $a_n = 1$. On a alors que $P^{(l)} = l!a_l + \sum_{k=1}^{n-l} \frac{(l+k)!}{k!} a_{l+k}X^k$ admet $n-l$ racines dans K. En particulier, $-a_l$ est compris entre le maximum des minima locaux et le minimum des maxima locaux de $\sum_{k=1}^{n-l} \frac{(l+k)!}{k!} a_{l+k}X^k$. Ainsi en réitérant pour l allant de $n-2$ à 0, on obtient des contraintes plus strictes sur $a_0, \ldots, a_{n-1}$ et donc une liste de polynômes susceptibles d'avoir toutes leur racines dans K beaucoup plus restreinte que dans l'algorithme naïf. En résumé, on a affiné les bornes de la remarque 1.1 en prenant en compte la valeur des autres coefficients déjà fixés. Ainsi les polynômes dont on calcule les racines sont beaucoup moins nombreux et de degré moindre, ce qui explique que cet algorithme soit plus efficace que le précédent. Grâce à cette optimisation, on a pu obtenir pour des segments inclus dans $[-2.5, 2.5]$, tous les entiers algébriques dont le degré du polynôme minimal est au plus $n = 7$. L'analyse de la figure 1 corrobore ce constat. Alors qu'on a calculé que l'algorithme naïf a une complexité au moins de l'ordre de C^{n^2}, le second algorithme a une complexité expérimentale proche de 15^n.

Après avoir écrit cet algorithme, nous avons cherché à le comparer à l'état de l'art. Dans [6], les auteurs combinent des techniques très proches de la nôtre mais plus raffinées avec des propriétés algébriques pour résoudre un problème proche du nôtre. Leur algorithme permet en un temps raisonnable d'aller jusqu'au degré 13 mais malheureusement on ne peut pas appliquer directement à notre problème leur algorithme.

1.2.2 • Résultats

Compte tenu de la remarque 1.3, un entier algébrique totalement dans un compact K est totalement dans tous les compact contenant K. On peut penser que les "gros" compacts vont avoir un nombre infini d'entiers algébriques alors que les "petits" compacts en auront un nombre fini.

Pour vérifier cela, nous avons tracé pour différents segments K de $\mathbb{R}$, l'évolution du nombre d'entiers algébriques totalement dans K en fonction du degré de leur polynôme minimal. Les résultats de la figure 3 font apparaître la longueur 4 comme étant la limite entre "petits" et "gros" segments. Pour les segments de longueur inférieure à 4, on trouve de moins en moins de nouveaux entiers algébriques lorsque le degré augmente (bleu, orange). Au contraire, pour les segments de longueur supérieure à 4, on en trouve de plus en plus (vert, rouge, violet). Cette observation reste valable lorsque l'on translate les segments.

Ces observations sont en accord avec les théorèmes que nous allons démontrer dans ce mémoire. Le comportement des "petits" segments est traité par le théorème de Fekete 3.1 et celui des grands segments par le théorème de Robinson 4.3.

Lorsque $K = [-2, 2]$, on peut remarquer que le nombre de nouveaux entiers algébriques totalement dans K trouvés au degré n semble augmenter mais pas de façon exponentielle (figure 2) et on peut vérifier que les entiers algébriques trouvés sont de la forme $2\cos(\frac{2k\pi}{m})$ avec k et m entiers. On verra dans la sous-section suivante (1.1) que les entiers algébriques totalement dans $[-2, 2]$ sont les $2\cos(\frac{2k\pi}{m})$ avec k et m entiers. Cependant l'algorithme ne les trouve pas par m croissant.

Au delà de la finitude de l'ensemble des entiers algébriques totalement dans un compact, on peut s'intéresser à la répartition de ces nombres. La figure 4 montre que la distribution est sensiblement la même à la fois lorsqu'on translate légèrement et lorsque la longueur change. De plus cette répartition est similaire à celle des racines des polynômes de Tchebychev.

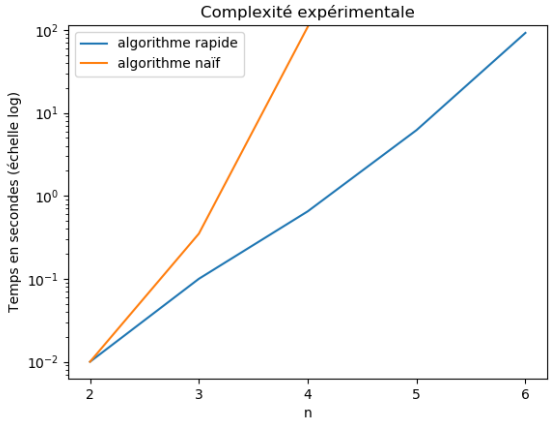


Figure 1 – Complexité expérimentale des deux algorithmes (longueur = 3.9)

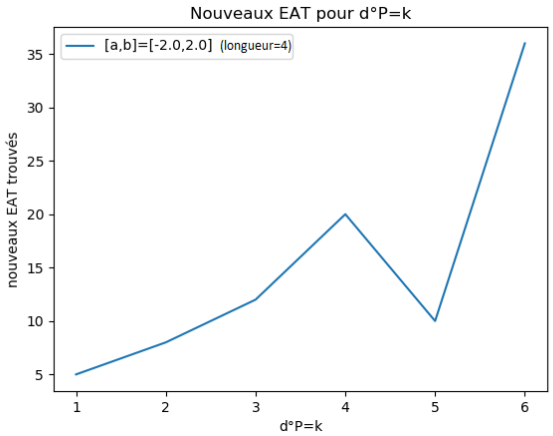


Figure 2 – Nombre de nouveaux entiers algébriques en fonction du degré des polynômes minimaux pour $K = [-2, 2]$

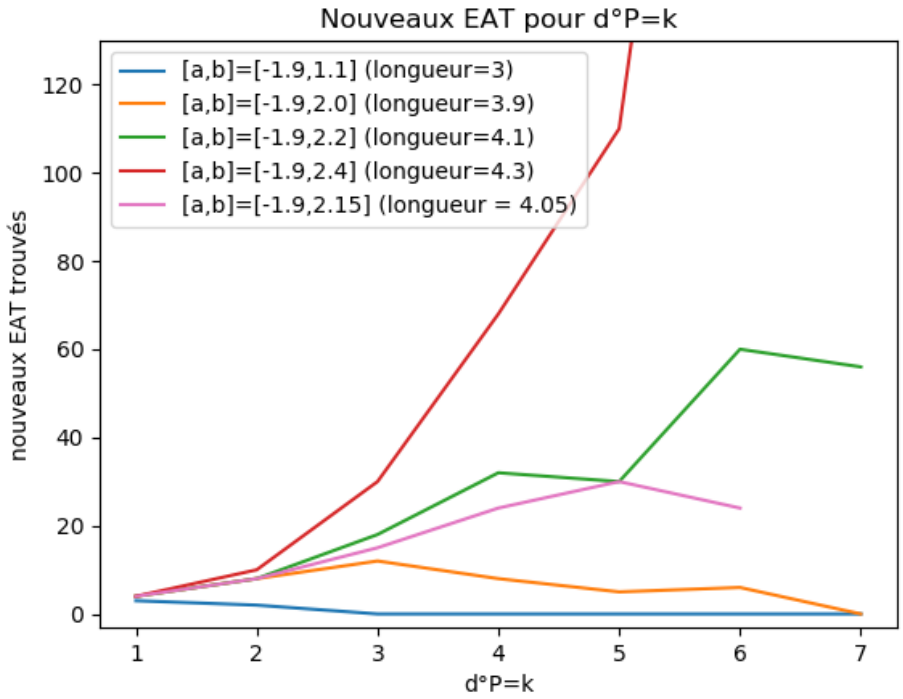


Figure 3 – Nombre de nouveaux entiers algébriques trouvés en fonction du degré des polynômes parcourus

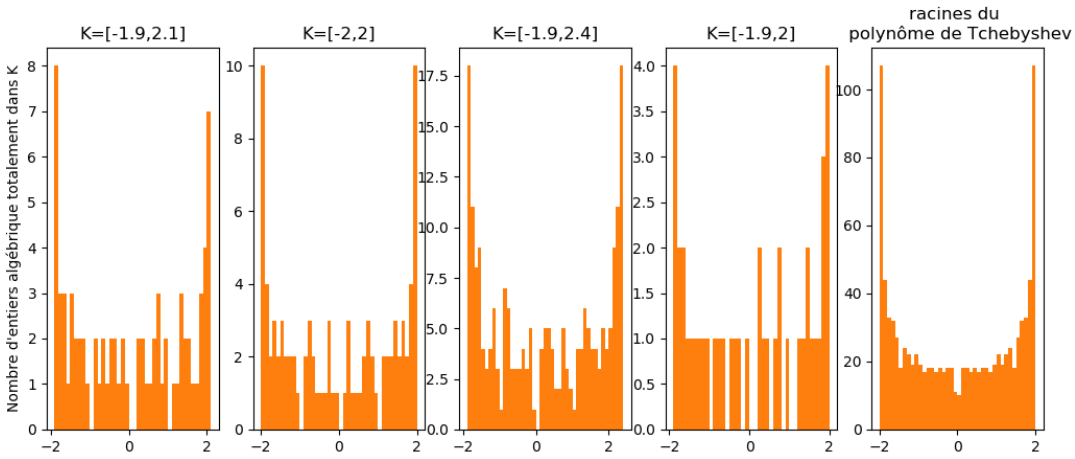


Figure 4 – Répartition des entiers algébriques de plus bas degré pour différents segments comparée à celle des racines des polynômes de Tchebychev

1.3 Deux cas élémentaires : $\mathbb{U}$ et $[-2, 2]$

Nous commençons par traiter les cas du cercle d'unité et des segments de longueur 4 aux bords entiers, où la situation est complètement connue.

1.3.1 • $K = \mathbb{U}$: Théorème de Kronecker

Quand $K = \mathbb{U}$ est le cercle unité, le résultat est donné par le théorème de Kronecker :

Théorème 1.1 (Kronecker). Si $P \in \mathbb{Z}[X]$ est un polynôme unitaire dont toutes les racines complexes sont dans le cercle unité $\mathbb{U}$, alors ses racines sont des racines de l'unité.

Commençons par un lemme :

Lemme 1.1 Soient $n, k \in \mathbb{N}$ et Q un polynôme de la forme $\prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$.

Si $Q \in \mathbb{Z}[X]$, alors $Q_k(X) := \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i^k) \in \mathbb{Z}[X]$.

Démonstration.
On considère un tel polynôme Q et des entiers n et k. La matrice compagnon M de Q est une matrice de $M_n(\mathbb{Z})$ dont le polynôme caractéristique est Q. Ainsi les α_i sont les valeurs propres de M. M est semblable à une matrice triangulaire de diagonale $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ puis M^k est semblable à une matrice triangulaire de diagonale $\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k$. Ainsi, les α_i^k sont les valeurs propres de M^k avec même multiplicité que pour M. Par conséquent, Q_k est le polynôme caractéristique de M^k. Cette dernière matrice étant à coefficients entiers, Q_k l'est également. □

Démontrons maintenant le théorème de Kronecker :

Démonstration. Soit $P = X^n + p_{n-1}X^{n-1} + \cdots + p_0 \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que $Z(P) \subset \mathbb{U}$, où $Z(P) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ est l'ensemble des racines complexes de P. Les relations coefficients-racines donnent :

$$p_{n-k} = (-1)^k \sum_{J \in \mathcal{P}_k([1,\dots,n])} \prod_{i=1}^{k} \alpha_{j_i}.$$

Comme les α_i sont de module 1, on obtient par inégalité triangulaire que $|p_{n-k}| \leq \binom{n}{k}$. Les coefficients de P étant entiers, on en déduit que l'ensemble $\mathcal{E}_n$ des polynômes de degré n vérifiant les hypothèses du théorème est fini. Il s'ensuit que l'ensemble $\mathcal{R}_n$ des racines des polynômes de $\mathcal{E}_n$ est aussi fini.

Soit α_i une racine de P et considérons le groupe multiplicatif engendré $G = \{\alpha_i^k, k \in \mathbb{Z}\}$. Avec les notations du lemme 1.1, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, α_i^k est racine de $Q_k \in \mathcal{E}_n$ selon le lemme. Ainsi, G est un groupe fini car $G \subset \mathcal{R}_n$. Par conséquent, il existe des entiers $k < k'$ tels que $\alpha^k = \alpha^{k'}$, c'est à dire $\alpha^{k'-k} = 1$. □

Remarque 1.4 Nous donnons une autre preuve du lemme 1.1 à l'aide des polynômes symétriques. Posons $P = \sum_{j=1}^{n} p_j X^j = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i) \in \mathbb{Z}[X]$ et $Q = \sum_{j=1}^{n} q_j X^j = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i^k)$. Notons S_j le j-ième polynôme symétrique

élémentaire à n indéterminées. Les relations coefficients-racines donnent : $p_{n-j} = (-1)^j S_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $q_{n-j} = (-1)^j S_j(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k)$. Selon le théorème de structure des polynôme symétriques, il existe un polynôme $R \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ tel que

$$S_j(X_1^k, \dots, X_n^k) = R(S_1, \dots, S_n)$$

Ainsi, les coefficients de Q

$$q_{n-j} = (-1)^j S_k(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k) = (-1)^j R(-p_{n-1}, \cdots, (-1)^n p_0)$$

sont entiers.

Le théorème de structure des polynômes symétriques peut en fait s'appliquer à tous les polynômes symétriques, de sorte que toutes les combinaisons symétriques à coefficients entiers de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des entiers.

Remarque 1.5 Notons que l'argument des matrices compagnons que nous avons évoqué dans la preuve du lemme 1.1 permet également de donner une preuve directe de ce cas particulier du théorème de structure des polynômes symétriques : "il existe $R \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$, tel que $S_j(X_1^k, \dots, X_n^k) = R(S_1, \dots, S_n)$".

En effet, avec les notations précédentes, soit M est la matrice compagnon associée à P.

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad M_{i,j} \in \{S_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) \,|\, 0 \leqslant j \leqslant n\} \cup \{0, 1\}.$$

On en déduit que :

$$\forall\, (i, j), \quad M_{i,j} \in \mathbb{Z}[S_0(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \dots, S_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)].$$

Ainsi les coefficients du polynôme caractéristique de M^k sont dans $\mathbb{Z}[S_0(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \dots, S_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)]$. Or ces coefficients sont justement au signe près les $(S_i(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k))_{0 \leqslant i \leqslant n}$. On en conclut que :

$$\forall\, 0 \leqslant i \leqslant n, \quad S_i(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k) \in \mathbb{Z}[S_0(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \dots, S_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)].$$

Conclusion du cas $K = \mathbb{U}$: les entiers algébriques totalement dans $\mathbb{U}$ sont les racines de l'unité, qui sont en nombre infini, on a donc ici un exemple de compact contenant une infinité d'entiers totalement algébriques.

1.3.2 • $K = [-2, 2]$

Proposition 1.1 Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que $Z(P) \subset [-2; 2]$.
Alors les racines de P sont de la forme $z + \overline{z}$, où z est une racine de l'unité.

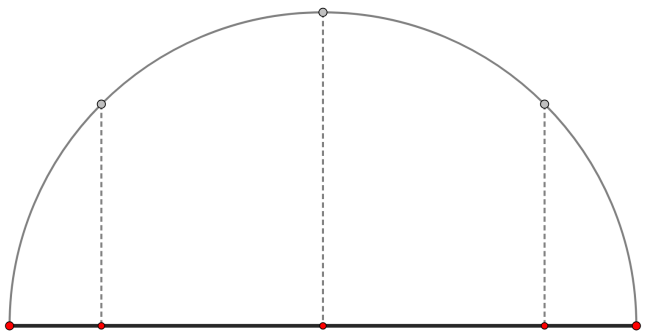


Figure 5 – exemples de points totalement dans $K = [-2, 2]$

Démonstration. Soit P un polynôme de degré n satisfaisant aux hypothèses de la proposition. Considérons $Q = X^n P(X + \frac{1}{X})$. En explicitant Q via la formule du binôme, on montre qu'il s'agit d'un polynôme unitaire de degré $2n$ à coefficients entiers. On note que ce polynôme ne s'annule pas en 0 car son coefficient constant est 1. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$Q(z) = 0 \Leftrightarrow P(z + \frac{1}{z}) = 0.$$

Soit z une racine complexe de Q. Selon ce qui précède, $z + \frac{1}{z}$ est racine de P, donc $z + \frac{1}{z} \in [-2, 2]$. En particulier, $z + \frac{1}{z}$ est réel. En l'égalisant à son conjugué, on obtient $\rho \sin(\theta) = \frac{1}{\rho} \sin(\theta)$, où ρ et θ sont respectivement le module et un argument de z. Deux cas se présentent :

- si $\sin(\theta) = 0$, alors $z \in \mathbb{R}$. Afin de vérifier $z + \frac{1}{z} \in [-2, 2]$, une étude de signe montre rapidement qu'alors $z = \pm 1$.
- si $\rho = \frac{1}{\rho}$, la positivité du module donne directement que $\rho = 1$.

Dans tous les cas, $z \in \mathbb{U}$, quelle que soit la racine z de Q. En appliquant le théorème de Kronecker, toute racine de Q est racine de l'unité.

Soit r une racine de P. Comme $r \in [-2, 2]$, on écrit $r = z + \overline{z}$, avec $z = \frac{r}{2} + i\sqrt{1 - \frac{r^2}{4}}$. Comme $z \in \mathbb{U}$, $r = z + \frac{1}{z}$. Ainsi, selon ce qui précède, z est racine de Q, donc z est racine de l'unité. □

Corollaire 1.1 Les entiers algébriques totalement dans $[-2, 2]$ sont les réels de la forme $z + \overline{z}$, avec z racine de l'unité.

Démonstration. La proposition précédente montre que les entiers algébriques totalement dans $[-2, 2]$ sont de la forme $z + \overline{z}$, avec z racine de l'unité. Il reste à montrer la réciproque.

Soit $(U_n)_n$ les polynômes de Tchebychev de seconde espèce définis par :

$$U_0 = 1 \text{ et } U_{n+1} = 2XU_n - U_{n-1}, \quad \forall n \geq 1.$$

On peut montrer par récurrence sur n que les polynômes $P_n(X) = U_n(\frac{X}{2})$ sont unitaires, de degré n et à coefficients entiers. Ils vérifient que $\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \quad \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta} = P_n(2\cos\theta)$. On en déduit que

$$\forall n \geqslant 1, Z(P_n) = \{2\cos\frac{k\pi}{n+1}, \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\}\} \subset [-2, 2].$$

Donc pour tout $n \geqslant 1, Z(P_n)$, est un ensemble d'entiers algébriques totalement dans $[-2, 2]$ ce qui implique que pour toute racine de l'unité z, $z + \overline{z}$ est totalement dans $[-2, 2]$. □

Conclusion du cas $K = [-2, 2]$: les entiers algébriques totalement dans $[-2, 2]$ sont les $z + \frac{1}{z}$, avec z racine de l'unité.

On en déduit le résultat pour tout segment de R de longueur 4 aux bords entiers par translation.

Corollaire 1.2 Soit $K = [n-2, n+2]$ un segment de $\mathbb{R}$ de longueur 4 aux bords entiers avec $n \in \mathbb{Z}$ son milieu. Les entiers algébriques totalement dans K sont les $n + z + \frac{1}{z}$, avec z une racine de l'unité.

Démonstration. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que $Z(P) \subset [n-2, n+2]$ et posons $Q = P(X+n)$. Comme $n \in \mathbb{Z}$, Q est unitaire à coefficients entiers, avec $Z(Q) \subset [-2, 2]$. La proposition 1.1 permet alors de conclure. □

De ce cas particulier, on déduit un théorème plus général qui apporte une première information :

Théorème 1.2 (Majorant de la longueur minimale nécessaire pour contenir un nombre infini d'entiers algébriques). Tout segment de longueur au moins 5 contient une infinité d'entiers algébriques totalement dedans

Démonstration. Tout segment de longueur 5 contient un segment de longueur 4 à bords entiers, et d'après la remarque 1.3, il contient au moins autant d'entiers algébriques totalement dedans que ce segment, donc une infinité d'après le corollaire 1.2 □

Une première partie du travail a été effectuée avec des remarques générales, une approche informatique qui montre que le résultat est "raisonnable", et un premier cas particulier qui peut se traiter avec des notions relativement simples et qui donne une première borne intéressante sur la longueur nécessaire. À présent, nous allons aborder une approche plus systématique, en donnant un cadre général pour l'étude de ce problème.

2
THÉORIE DES CAPACITÉS

Nous allons commencer par nous intéresser à la notion de *capacité*. Il s'agit d'un réel positif associé à un ensemble qui peut être vu comme traduisant la « taille » de cet ensemble, mais non une taille géométrique telle que la notion de mesure décrit : la terminologie vient de la physique, plus précisément de la *capacité d'un condensateur*, qui décrit littéralement la capacité de contenir des charges électriques d'un ensemble. Nous allons voir pourquoi il s'agit d'une « bonne » définition de la taille d'un compact lorsque l'on s'intéresse aux entiers algébriques. C'est cette notion qui fournit un critère permettant de déterminer si un compact contient un nombre infini d'entiers algébriques totalement dedans, comme on le verra dans la section 4 avec les théorèmes de Fekete et de Fekete-Szegö.

Le but de cette section est d'énoncer les trois définitions équivalentes de la notion de capacité : diamètre transfini (2.1), capacité logarithmique (2.2) et constante de Tchebychev (2.4). Le théorème central de cette section est le théorème 2.10 qui affirme l'équivalence entre ces trois définitions, et énonce des propriétés importantes des objets permettant de relier ces trois points de vue : mesures de Fekete, mesure d'équilibre, potentiel d'équilibre, polynômes de Fekete, polynômes de Tchebychev... Dans la section 2.3, nous allons également démontrer une formule de calcul de capacité à l'aide des fonctions semi-harmoniques : cette section, assez technique, peut être sautée à la première lecture.

Nous allons commencer par présenter la notion de diamètre transfini d'un compact à l'aide des points de Fekete ; puis nous allons étudier la notion de capacité logarithmique et de mesure d'équilibre sur un compact, avant d'unifier ces deux notions. Enfin, nous allons voir une troisième définition de la capacité par les polynômes de Tchebychev. C'est grâce à cette dernière définition que l'on pourra calculer explicitement la capacité des segments.

2.1 Diamètre transfini, points de Fekete

Pour se donner une première intuition, nous allons considérer un problème géométrique issu de l'électrostatique : plaçons des électrons dans un domaine borné. Les électrons vont tendre à maximiser leurs distances mutuelles de sorte à minimiser l'énergie totale. En dimension 3, la force est proportionnelle au carré de l'inverse de la distance, et le potentiel proportionnel à l'inverse de la distance. Comme on étudie ce problème en dimension 2 dans le plan complexe, on a donc une force proportionnelle à l'inverse de la distance et le potentiel est proportionnel au log de la distance.

Étant donné K un compact de $\mathbb{C}$ et $z_1, \dots, z_n \in K$, on définit le *potentiel* en z_i (éventuellement égal à $+\infty$) comme suit :

$$U_{z_1,\dots,z_n}(z_i) = -\sum_{j\neq i} \log|z_j - z_i|\,.$$

On définie aussi l'énergie de la configuration $(z_1, \dots, z_n)$ comme la moyenne des potentiels en chaque point :

$$E(z_1, \dots, z_n) = -\frac{2}{n(n-1)} \sum_{i<j} \log|z_i - z_j| = -\log \prod_{i<j} |z_i - z_j|^{\frac{2}{n(n-1)}}$$

On s'intéresse au problème de minimisation de l'énergie sur le compact K pour un nombre de points n donné :

$$E(K) = \min_{z_1,\dots,z_n\in K} E(z_1, \dots, z_n) = -\log \max_{z_1,\dots,z_n\in K} \prod_{i<j} |z_i - z_j|^{\frac{2}{n(n-1)}}$$

La borne inférieure est atteinte car K est compact, d'où le min dans le problème d'optimisation. Les points en lesquels ce minimum est atteint sont appelés les *points de Fekete* :

Définition 2.1 **(Points de Fekete).** Soit K un compact de $\mathbb{C}$. On définit

$$\delta_n(K) = \max_{z_1,\dots,z_n \in K} \prod_{i<j} |z_i - z_j|^{2/n(n-1)}$$

Les points en lesquels ce maximum est atteint sont appelés *points de Fekete* (d'ordre n).

Remarque 2.1 On retrouve le diamètre classique pour $n = 2$.

Lemme 2.1 Soit $f : K \times K \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ une application et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$m_n^f(K) = \sup_{x_1,\dots,x_n \in K} \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} f(x_i, x_j).$$

La suite $(m_n^f(K))_n$ est décroissante.

Démonstration. Soient $n \geq 1$, et $x_1, \dots, x_{n+1} \in K$ (non nécessairement distincts). On a l'égalité suivante

$$\frac{1}{n(n+1)} \sum_{i \neq j} f(x_i, x_j) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j, i \neq k, j \neq k} f(x_i, x_j) \right);$$

en effet, on la vérifie facilement en calculant les coefficients de $f(x_i, x_j)$ de chaque côté : le terme $f(x_i, x_j)$ à droite ne concerne que les $k \in [\![1, n+1]\!] \backslash \{i, j\}$ donc il y a $n - 1$ choix. À k fixé, la somme $\sum_{i \neq j, i \neq k, j \neq k}$ à droite peut être considérée comme $\sum_{i \neq j}$ où $i, j \in [\![1, n+1]\!] \backslash \{k\}$, qui est inférieure ou égale à $m_n^f(K)$ par définition. Puis on prenant le sup sur $x_1, \dots, x_n \in K$ on obtient que :

$$m_{n+1}^f(K) \leqslant \sup_{x_1,\dots,x_n \in K} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} m_n^f(K) = m_n^f(K).$$

□

Définition 2.2 **(Diamètre transfini).** La suite $(\delta_n(K))_{n \geqslant 2}$ est positive décroissante. La limite

$$\tau(K) = \lim_{n \to \infty} \delta_n(K)$$

est appelée *diamètre transfini*.

Démonstration. La décroissance de $(\delta_n(K))_{n \geqslant 2}$ se déduit du lemme 2.1 □

Nous avons ainsi défini notre première notion de capacité d'un compact : le diamètre transfini. Nous allons maintenant montrer quelques propriétés élémentaires qui se déduisent de cette définition ainsi que quelques exemples.

Proposition 2.1 Soit K un compact de $\mathbb{C}$, alors

1. si $a, b \in \mathbb{C}$, alors $\tau(aK+b) = |a|\,\tau(K)$;
2. $\delta_n(K) = \delta_n(\partial K)$ et donc $\tau(K) = \tau(\partial K)$.

Démonstration. (a) se déduit aisément de la définition.

(b) Soit $n \geq 2$. Posons $h(z_1, \dots, z_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(z_i - z_j)$. C'est une fonction holomorphe à n variables complexes sur $\mathbb{C}^n$, donc $\|h\|_{K^n} = \|h\|_{(\partial K)^n}$ (pour le détailler, on peut utiliser le principe du maximum d'une fonction holomorphe à une seule variable), d'où $\delta_n(K) = \delta_n(\partial K)$. □

Proposition 2.2 (Cercle unité). Les points de Fekete sur $\mathbb{U}$ sont les racines n-ième de l'unité à une rotation près. Le diamètre transfini du cercle unité est 1.

Démonstration. Soient $n \geqslant 2$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{U}$, notons $D(x_1, \dots, x_n)$ le déterminant de la matrice de Vandermonde $D(x_1, \dots, x_n) = \det((x_i^{j-1})_{1 \leq i,j \leq n}) = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$.

On a ainsi $\delta_n(\mathbb{U}) = \max\limits_{x_1,\dots,x_n \in \mathbb{U}} |D(x_1, \dots, x_n)|^{\frac{2}{n(n-1)}}$ Or par l'inégalité de Hadamard

$$|D(x_1, \dots, x_n)| \leq \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2 \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_2 \dots \left\| \begin{pmatrix} x_1^{n-1} \\ \vdots \\ x_n^{n-1} \end{pmatrix} \right\|_2 = n^{\frac{n}{2}}.$$

Ainsi $\delta_n(\mathbb{U}) \leq n^{\frac{1}{n-1}}$.

L'égalité est atteinte lorsque les vecteurs lignes forment une famille orthogonale qui est libre ou qui contient un vecteur nul, ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} D(x_1, \dots, x_n) = n^{\frac{n}{2}} &\Leftrightarrow \forall i < j \in [\![1, n]\!], \begin{pmatrix} x_i^0 \\ \vdots \\ x_i^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_j^0 \\ \vdots \\ x_j^{n-1} \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i < j \in [\![1, n]\!], \sum_{k=0}^{n-1} (x_j \overline{x_i})^k = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i < j \in [\![1, n]\!], x_j \neq x_i \text{ et } \frac{1 - (x_j \overline{x_i})^n}{1 - x_j \overline{x_i}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i < j \in [\![1, n]\!], x_j \overline{x_i} \in \mathbb{U}_n - \{1\} \\ &\Leftrightarrow \{x_1, \dots, x_n\} = x_1 \mathbb{U}_n \end{aligned}$$

Ainsi $\delta_n(\mathbb{U}) = n^{\frac{1}{n-1}}$, les points de Fekete sont les racines n$^{\text{ièmes}}$ de l'unité à une rotation près puis $\tau(\mathbb{U}) = \lim\limits_{n \to \infty} n^{\frac{1}{n-1}} = 1$. □

Corollaire 2.1 On a $\tau(\overline{B}(0, \rho)) = \rho$.

Démonstration. Il résulte de la Prop. 2.1 et la Prop. 2.2 que

$$\tau(\overline{B}(0,\rho)) = \rho\,\tau(B(0,1)) = \rho\,\tau(\partial B(0,1)) = \rho\,\tau(\mathbb{U}) = \rho.$$

□

Proposition 2.3 Soit $K = \{0\} \cup \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$. On a $\tau(K) = 0$.

Démonstration. Soit $n \geq 2$. Soient $x_n \leq y \leq x_{n-1} \leq \cdots \leq x_1$ un choix de points de Fekete dans $K \subset [0,1]$, alors

$$\begin{aligned}\delta_{n+1}(K)^{\frac{(n+1)n}{2}} &= (y - x_n)\left(\prod_{i=1}^{n-1}(x_i - y)\right)\left(\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i - x_j)\right)\\ &\leq (y - x_n)\left(\prod_{i=1}^{n-1}(x_i - y)\right)\delta_n(K)^{\frac{n(n-1)}{2}}\end{aligned}$$

On peut continuer les majorations avec $x_n = 0$ et comme tous les points sont distincts, alors $x_i \leq \frac{1}{i}$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$ et $y \leq \frac{1}{n}$, donc

$$(y - x_n)\left(\prod_{i=1}^{n-1}(x_i - y)\right) \leq \left(\frac{1}{n} - 0\right)\prod_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{i} - 0\right) = \frac{1}{n\,!}$$

D'où

$$\delta_{n+1}(K)^{\frac{(n+1)n}{2}} \leq \frac{1}{n\,!}\delta_n(K)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Ainsi on obtient par récurrence, avec le calcul simple $\delta_2(K) = 1$, l'inégalité suivante

$$\delta_{n+1}(K) \leq \left(\prod_{i=2}^{n} i\,!\right)^{-\frac{2}{(n+1)n}}$$

On remarque enfin que ce dernier terme tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. En effet, on a pour $n \geq 8$

$$\begin{aligned}\log\left(\prod_{i=2}^{n} i\,!\right) &= \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{i}\log j = \sum_{j=2}^{n}(n+1-j)\log j\\ &\geq \sum_{j=[\frac{n}{4}]}^{3[\frac{n}{4}]}\cdots \geq \sum_{j=[\frac{n}{4}]}^{3[\frac{n}{4}]}\frac{n}{4}\log\left[\frac{n}{4}\right] = \Theta(n^2\log n), \quad n \to \infty\end{aligned}$$

□

On pourra donner une autre preuve plus tard (cf. Ex. 2.4, Thm. 2.3).

2.2 Passage au continu : mesure d'équilibre et capacité logarithmique

Dans cette section, nous allons manipuler les mesures de probabilité sur un compact et quelques résultats sur les mesures. Les éléments de théorie de la mesure sont rappelés dans l'Annexe A.

Les points de Fekete caractérisent les situations d'équilibre quand on dispose d'un nombre fini de particules. Le diamètre transfini décrit la capacité d'un compact de contenir des charges (comme un condensateur), quand le nombre de charges tend vers l'infini, la distribution de charge devient continue.

Ce passage à la limite peut être formalisé par le concept de convergence faible-$*$ des mesures. Rappelons la définition ici :

Définition 2.3 (Convergence faible-$*$). Soit $D \subset \mathbb{C}$ et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures sur D. Soit μ une mesure sur D. On dit que $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers μ, noté $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$, si et seulement si

$$\forall f \in C_c^0(D,\mathbb{R}),\ \lim_{n\to\infty} \int_D f \ \mathrm{d}\mu_n = \int_D f \ \mathrm{d}\mu$$

.

Exemple 2.1 (Intégrale de Riemann). Nous pouvons voir l'intégrale de Riemann comme la mesure limite d'une suite de mesures de comptage : en effet, si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f \ \mathrm{d}x$$

Si on note ν_n la mesure de comptage par rapport aux points $\{\frac{k}{n} \mid k = 0,\dots,n\}$, la forme linéaire continue $\int_0^1$ est la mesure limite de la suite (ν_n) pour la convergence faible-$*$.

Exemple 2.2 Si ν_n est la mesure de comptage par rapport aux racines n-ième de l'unité $\{e^{\frac{2\pi i k}{n}} \mid k = 0,\dots,n-1\}$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int f \ \mathrm{d}\nu_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \ \mathrm{d}\theta$$

L'espace des mesures de probabilité sur un compact peut être muni d'une topologie associée à cette notion de convergence : la topologie faible-*. Le résultat essentiel est que cet espace topologique est séquentiellement compact.

Théorème 2.1 (Banach-Alaoglu-Bourbaki). Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Notons $\mathcal{P}(K)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur K. $\mathcal{P}(K)$ muni de la topologie faible-* est un espace séquentiellement compact.

Autrement dit, pour toute suite de mesures de probabilité $(\mu_n)_n$, il existe une sous-suite $(\mu_{\varphi(n)})_n$ et une mesure de probabilité μ telles que $\mu_{\varphi(n)} \xrightarrow{*} \mu$, *i.e.*

$$\forall \phi \in C(X), \int_X \phi \ \mathrm{d}\mu_{\varphi(n)} \longrightarrow \int_X \phi \ \mathrm{d}\mu$$

La démonstration de ce fait est donnée dans l'annexe A.

Soit toujours $K \subset \mathbb{C}$ un compact et reprenons notre modèle électrostatique introduit à la sous-section 2.1. On peut considérer une mesure de probabilité $\mu \in \mathcal{P}(K)$ comme une distribution de charge positive dans K.

Par exemple, une charge ponctuelle en z peut être modélisée par δ_z la mesure de Dirac en z, et une distribution discrète peut être modélisée par une mesure de comptage.

Définition 2.4 (Potentiel, énergie). Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact. Soit $\mu \in \mathcal{P}(K)$ une mesure de probabilité sur K.

On définit *le potentiel en un point z par rapport à μ*

$$U^\mu(z) = \int_K \log \frac{1}{|z-t|} \, \mathrm{d}\mu(t)$$

et l'énergie du compact K associée à μ

$$I(\mu) = \int_K U^\mu(z) \, \mathrm{d}\mu(z) = \iint_{K^2} \log \frac{1}{|z-t|} \, \mathrm{d}\mu(z) \, \mathrm{d}\mu(t)$$

À l'équilibre, la distribution de charge tend à minimiser l'énergie totale. Nous avons donc un problème de minimisation d'énergie sur l'espace des mesures sur K.

Définition 2.5 (Capacité logarithmique, mesure d'équilibre). On définit la *constante de Robin*

$$V_K = \inf_{\mu \in \mathcal{P}(K)} I(\mu)$$

et la *capacité logarithmique*

$$\mathrm{Cap}(K) = e^{-V_K}.$$

Si l'infimum $V_K = \inf_{\mu\in\mathcal{P}(K)} I(\mu)$ est atteint en une mesure μ_K, cette mesure est appelée *mesure d'équilibre*. Dans ce cas, on a $\mathrm{Cap}(K) = e^{-I(\mu_K)}$.

Le potentiel U^{μ_K} associé à une mesure d'équilibre est appelé *potentiel d'équilibre*.

Définition 2.6 La capacité d'un ensemble borélien $B \subset \mathbb{C}$ est définie comme

$$\mathrm{Cap}(B) = \sup\{\mathrm{Cap}(K) : K \subset B, K \text{ compact}\}$$

Définition 2.7 (Propriétés vraies quasi-partout). Soit K un compact. On dit qu'*une propriété est vraie pour quasi-tout (q.t.)* $\zeta \in K$, s'il existe un sous-ensemble compact S de capacité nulle tel que la propriété soit vraie pour tout $\zeta \in K \backslash S$.

Exemple 2.3 Soit $\mu \in \mathcal{P}(K)$; s'il existe un point $z \in K$ tel que $\mu(\{z\}) > 0$, alors $I(\mu) = +\infty$ par définition. En outre, si pour tout $\mu \in \mathcal{P}(K)$ il existe un tel point, alors $\mathrm{Cap}(K) = 0$.

Exemple 2.4 Tout compact dénombrable est de capacité zéro. En effet, toute mesure de probabilité sur un tel ensemble est atomique ; il suffit alors d'appliquer l'exemple précédent.

Remarque 2.2 (Approche heuristique). Si on considère ν_F la mesure de comptage (moyennée) par rapport à $F = \{z_1, \ldots, z_n\}$, si on néglige les termes divergents, on retrouve la définition discrète donnée dans la sous-section 2.1

$$I(\nu_F) = -\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \log|z_i - z_j| = -\log \prod_{i \neq j} |z_i - z_j|^{\frac{2}{n(n-1)}}$$

Pour trouver la mesure minimisant l'énergie, il est donc naturel de considérer la mesure limite des mesures de comptage associées aux points de Fekete.

Cette intuition sera justifiée plus tard.

Lemme 2.2 (Principe de descente). Soit (μ_n) une suite de mesures dans $\mathcal{P}(K)$ tel que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$U^{\mu}(z) \leqslant \liminf_{n\to\infty} U^{\mu_n}(z)$$

par suite

$$I(\mu) \leqslant \liminf_{n\to\infty} I(\mu_n)$$

Démonstration. Ce lemme est une conséquence de la proposition A.3 appliquée à $t \to \log \frac{1}{|z-t|}$ qui est s.c.i. :

$$\int_K \log \frac{1}{|z-t|}\, \mathrm{d}\mu(t) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_K \log \frac{1}{|z-t|}\, \mathrm{d}\mu_n(t)$$

pour tout $z \in K$, d'où la première inégalité. La seconde inégalité s'ensuit en intégrant par rapport à $\mathrm{d}\mu(z)$ et en appliquant le lemme de Fatou. □

Théorème 2.2 (Mesure d'équilibre). Il existe toujours une mesure d'équilibre. De plus, si $V_K < +\infty$ (ou de manière équivalente $\mathrm{Cap}(K) > 0$), la mesure d'équilibre est unique.

Démonstration. L'unicité résulte directement du fait que $\mu \mapsto I(\mu)$ est strictement convexe sur $\{\mu \in \mathcal{P}(K) : I(\mu) < \infty\}$ ([7], Chap. I, Thm. 1.3(b), Lem. 1.8). L'existence découle du théorème A.1 qui affirme que l'espace des mesures de probabilité sur un compact est compact. En effet,

$$V_K = \inf_{\mu\in\mathcal{P}(K)} I(\mu)$$

Soit (μ_n) une suite de mesures telle que $I(\mu_n) \to V_K$. Par compacité, il existe $\mu \in \mathcal{P}(K)$ et une sous-suite (μ_{n_k}) telles que $\mu_{n_k} \xrightarrow{*} \mu$. Par le lemme 2.2 :

$$I(\mu) \leqslant \liminf_{k\to+\infty} I(\mu_{n_k}) = V_K \leqslant I(\mu)$$

car V_K est l'infimum. D'où $V_K = I(\mu)$. □

Nous avons maintenant toutes les clefs en main pour montrer l'équivalence des deux définitions de capacité précédemment définies.

Théorème 2.3 Soit K un compact de $\mathbb{C}$. On a

$$\tau(K) = \mathrm{Cap}(K).$$

De plus, si $\mathrm{Cap}(K) > 0$ et qu'on note μ_K la mesure d'équilibre de K et ν_n les mesures de comptage associées aux points de Fekete, alors

$$\nu_n \xrightarrow{*} \mu_K$$

On dit que les points de Fekete sont équidistribués selon la mesure d'équilibre de K.

Démonstration. On va plutôt comparer $V_K = \log \frac{1}{\mathrm{Cap}(K)}$ et $\log \frac{1}{\tau(K)}$. Montrons d'abord $\log \frac{1}{\mathrm{Cap}(K)} \geqslant \log \frac{1}{\tau(K)}$.

Définissons pour $z_1, \dots, z_n \in K$:

$$F(z_1, \dots, z_n) := \sum_{i<j} \log \frac{1}{|z_i - z_j|}$$

Rappelons la définition de $\delta_n(K)$ dans la définition 2.1 :

$$\delta_n(K) = \max_{z_1,\dots,z_n \in K} \prod_{i<j} |z_i - z_j|^{2/n(n-1)}$$

et que $\tau(K) = \lim \delta_n(K)$. Définissons aussi l'énergie minimale associée à une configuration à n points :

$$\mathcal{E}_n := \min_{z_1,\dots,z_n \in K} F(z_1, \dots, z_n) = \frac{n(n-1)}{2} \log \frac{1}{\delta_n(K)}$$

Soit μ_K une mesure d'équilibre sur K. On pose

$$\begin{aligned} J &:= \int \cdots \int F(z_1, \dots, z_n) \, \mathrm{d}\mu_K(z_1) \dots \, \mathrm{d}\mu_K(z_n) \\ &= \sum_{i<j} \int \cdots \int \log \frac{1}{|z_i - z_j|} \, \mathrm{d}\mu_K(z_1) \dots \, \mathrm{d}\mu_K(z_n) \\ &= \sum_{i<j} \int \int \log \frac{1}{|z_i - z_j|} \, \mathrm{d}\mu_K(z_i) \, \mathrm{d}\mu_K(z_j) \\ &= \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} V_K \\ &= \frac{n(n-1)}{2} V_K \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} J &\geqslant \int \cdots \int \mathcal{E}_n \, \mathrm{d}\mu_K(z_1) \dots \, \mathrm{d}\mu_K(z_n) \\ &= \mathcal{E}_n \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \log \frac{1}{\delta_n(K)} \end{aligned}$$

D'où $V_K = \log \frac{1}{\mathrm{Cap}(K)} \geqslant \log \frac{1}{\tau(K)}$.

Notons ν_n mesures de comptage par rapports aux points de Fekete $\{z_1, \dots, z_n\}$. Par compacité, il existe

une sous-suite (ν_{n_k}) et $\mu \in \mathcal{P}(K)$ de sorte que $\nu_{n_k} \xrightarrow{*} \mu$. Alors

$$\begin{aligned}
I(\mu) &= \iint \log \frac{1}{|z-t|} \, \mathrm{d}\mu(z) \, \mathrm{d}\mu(t) \\
&= \lim_{M\to+\infty} \iint \min[M, \log \frac{1}{|z-t|}] \, \mathrm{d}\mu(z) \, \mathrm{d}\mu(t) \\
&= \lim_{M\to+\infty} \lim_{k\to+\infty} \iint \min[M, \log \frac{1}{|z-t|}] \, \mathrm{d}\nu_{n_k}(z) \, \mathrm{d}\nu_{n_k}(t) \\
&= \lim_{M\to+\infty} \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{n_k^2} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n_k} \min[M, \log \frac{1}{|z_i - z_j|}] \\
&\leqslant \lim_{M\to+\infty} \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{n_k^2} (\sum_{i=1}^{n_k} M + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n_k} \log \frac{1}{|z_i - z_j|}) \\
&\leqslant \lim_{M\to+\infty} \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{n_k^2} (n_k M + n_k(n_k-1) \log \frac{1}{\delta_{n_k}(K)}) \\
&= \log \frac{1}{\tau(K)}
\end{aligned}$$

Donc

$$I(\mu) \leqslant \log \frac{1}{\tau(K)} \leqslant \log \frac{1}{\mathrm{Cap}(K)} = V_K \leqslant I(\mu)$$

Ainsi, $\tau(K) = \mathrm{Cap}(K)$.

De plus, $I(\mu) = V_K = I(\mu_K)$. Dans le cas où $\mathrm{Cap}(K) > 0$, $\mu = \mu_K$ l'unique mesure d'équilibre sur K. Donc (ν_n) est une suite d'éléments d'un compact admettant μ_K comme unique valeur d'adhérence, donc

$$\nu_n \xrightarrow{*} \mu_K$$

□

Exemple 2.5 Les mesures d'équilibre $\mu_{\mathbb{U}}$ et $\mu_{\overline{B}}$ du cercle unité $\mathbb{U}$ et du disque unité $\overline{B}$ sont toutes les deux $\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$ sur $\mathbb{U}$, et le potentiel d'équilibre correspondant est

$$U^{\mu}(z) = -\log^+ |z| = -\max(0, \log|z|)$$

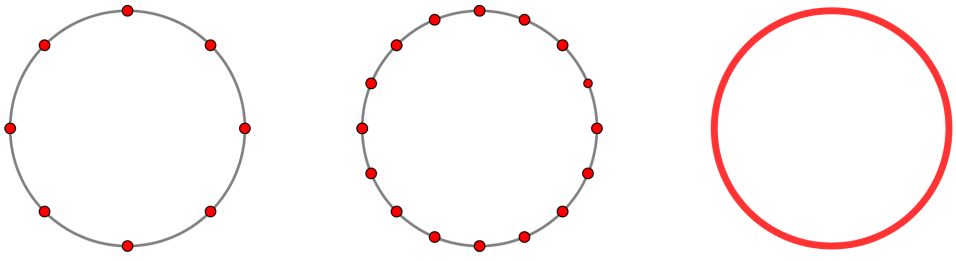


Figure 6 – Points de Fekete pour $n \in \{8, 16\}$ et mesure d'équilibre avec $K = \mathbb{U}$

Démonstration.

- Soit f une fonction continue. En appliquant le théorème de convergence des sommes de Riemann à $\theta \mapsto f(e^{i\theta})$, on a :
$$\nu(\mathbb{U}_n)(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\exp\frac{2ik\pi}{n}) \underset{n\to\infty}{\to} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$$
Or $\mathbb{U}_n$ est un ensemble de points de Fekete de $\mathbb{U}$ (Prop. 2.2) donc $\nu(\mathbb{U}_n) \xrightarrow{*} \mu_{\mathbb{U}}$ (Thm. 2.3). D'où $\boxed{\mu_{\mathbb{U}} = \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}}$.
- Avec le changement de variable $t := \theta + \phi$:
$$U^{\mu_{\mathbb{U}}}(z) = -\int_0^{2\pi} \log(\left|z - e^{i\theta}\right|)\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = -\int_0^{2\pi} \log(\left|ze^{i\phi} - e^{it}\right|)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = U^{\mu_{\mathbb{U}}}(|z|)$$
Soit $r \in \mathbb{R}_+$
$$U^{\nu(\mathbb{U}_n)}(r) = -\frac{1}{n}\log\left|\prod_{k=0}^{n-1}(r - e^{\frac{2ik\pi}{n}})\right| = -\frac{1}{n}\log|r^n - 1|$$
  - Si $r < 1$, $|r^n - 1| \to 1$, donc $U^{\nu(\mathbb{U}_n)}(r) = -\frac{1}{n}\log|r^n - 1| \underset{n\to\infty}{\to} 0$
  - Si $r > 1$, $U^{\nu(\mathbb{U}_n)}(r) = -\frac{1}{n}\log|r^n - 1| = -\log(r) - \frac{1}{n}\log\left|\frac{1}{r}^n - 1\right| \underset{n\to\infty}{\to} -\log(r)$

  Lorsque $r \neq 1$, la fonction $t \in \mathbb{U} \mapsto -\log|z - t| \in \mathbb{C}$ est continue donc
  $U^{\mu_{\mathbb{U}}}(r) = \lim_{n\to\infty} U^{\nu(\mathbb{U}_n)}(r) = \begin{cases} 0 \text{ si } r < 1 \\ \log\frac{1}{r} \text{ si } r > 1 \end{cases}$
  Lorsque $r = 1$, en utilisant 2.2 et 2.3 on a : $0 = -\log(\tau(\mathbb{U})) = V_{\mathbb{U}} = \int_{\mathbb{U}} U^{\mu_{\mathbb{U}}}(z)\ \mathrm{d}\mu_{\mathbb{U}}(z) = U^{\mu_{\mathbb{U}}}(1)$
  D'où $\boxed{U^{\mu_{\mathbb{U}}}(z) = -\log^+|z|}$
- La Prop. 2.4(c) donne $\mathrm{Cap}(\mathbb{U}) = \mathrm{Cap}(\overline{B})$ et $V_{\overline{B}} = I(\mu_{\mathbb{U}}) \neq +\infty$ par unicité de la mesure d'équilibre on en déduit $\mu_{\overline{B}} = \mu_{\mathbb{U}}$ et $U^{\mu_{\overline{B}}} = U^{\mu_{\mathbb{U}}}$.

□

Après avoir unifié les deux notions de capacité précédemment définies, nous allons présenter dans le reste de cette section un certain nombre de propriétés de la capacité.

Proposition 2.4 Considérons (K_n) des compacts dans $\mathbb{C}$.

(a) Soit $K_1 \subset K_2$, alors $\mathrm{Cap}(K_1) \leq \mathrm{Cap}(K_2)$.

(b) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, alors $\mathrm{Cap}(\alpha K + \beta) = |\alpha|\,\mathrm{Cap}(K)$.

(c) $\mathrm{Cap}(K) = \mathrm{Cap}(\partial K)$.

(d) Soit $(K_n)_n$ une suite décroissante et soit $K = \bigcap_n K_n$, alors $\mathrm{Cap}(K) = \lim_n \mathrm{Cap}(K_n)$.

(e) Soit $(K_n)_n$ une suite croissante et supposons $K = \bigcup_n K_n$ compact, alors $\mathrm{Cap}(K) = \lim_n \mathrm{Cap}(K_n)$.

(f) Supposons $\mathrm{Cap}(K) = 0$. Alors $\nu(K) = 0$ pour toute mesure ν finie et à support compact dans $\mathbb{C}$ telle que $I(\nu) < +\infty$. En particulier, la mesure de Lebesgue $m_2(K) = 0$.

Démonstration. (a) et (b) se déduisent directement de la définition.

(c) résulte du théorème 2.3 et de la proposition 2.1.

(d) Il suffit selon (a) de montrer que $\mathrm{Cap}(K) \geq \lim_n \mathrm{Cap}(K_n)$, et on peut supposer en plus que $\mathrm{Cap}(K_n) > 0$ pour tout n. Soit μ_{E_n} la mesure d'équilibre de K_n, alors $\mu_{E_n} \in \mathcal{P}(K_0)$. Selon le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki, on peut en extraire une sous-suite $(\mu_{E_{\varphi(n)}})_n$ qui converge faiblement-* vers une mesure $\mu^\star \in \mathcal{P}(K_0)$. Alors le principe de descente donne

$$I(\mu^\star) \leq \liminf_n I(\mu_{\varphi(n)}) = \liminf_n \left(-\log \mathrm{Cap}(K_{\varphi(n)})\right) = -\lim_n \log \mathrm{Cap}(K_n)$$

D'autre part, Prop. A.1 implique

$$\operatorname{supp} \mu^\star \subset \bigcap_n \operatorname{supp} \mu_{E_{\varphi(n)}} \subset \bigcap_n K_{\varphi(n)} = \bigcap_n K_n = K$$

Donc $\mu^\star \in \mathcal{P}(K)$, puis

$$\mathrm{Cap}(K) \geq e^{-I(\mu^\star)} \geq \exp\left(\lim_n \log \mathrm{Cap}(K_n)\right) = \lim_n \mathrm{Cap}(K_n)$$

(e) Il suffit selon (a) de montrer que $\mathrm{Cap}(K) \leq \lim_n \mathrm{Cap}(K_n)$, et on peut supposer en plus que $\mathrm{Cap}(K) > 0$. Soit $\mu \in \mathcal{P}(K)$. Comme $\lim_n \mu(K_n) = \mu(K) = 1$, on a $\mu(K_n) > 0$ pour n suffisamment grand. Alors pour un tel n, on prend $\frac{\mu|_{K_n}}{\mu(K_n)} \in \mathcal{P}(K_n)$. On a

$$-\log \mathrm{Cap}(K_n) \leq I\left(\frac{\mu|_{K_n}}{\mu(K_n)}\right) = \frac{1}{\mu(K_n)^2} \int_{K_n}\int_{K_n} \log \frac{1}{|z-t|}\, \mathrm{d}\mu(t)\, \mathrm{d}\mu(z)$$

Comme le domaine d'intégration $K_n \times K_n$ croît avec n et tend vers $K \times K$ car (K_n) est croissante et tend vers K, on obtient

$$-\log\left(\lim_n \mathrm{Cap}(K_n)\right) \leq \frac{1}{\lim_n \mu(K_n)^2} \int_K \int_K \log \frac{1}{|z-t|}\, \mathrm{d}\mu(t)\, \mathrm{d}\mu(z) = I(\mu)$$

où on a appliqué le théorème de la convergence monotone en vérifiant que sur $K \times K$, $\log \frac{1}{|z-t|}$ est borné inférieurement par $\log(1/\delta_2(K))$. En particulier, quand $\mu = \mu_K$ la mesure d'équilibre de K, $I(\mu_K) = -\log \mathrm{Cap}(K)$, on obtient $\mathrm{Cap}(K) \leq \lim_n \mathrm{Cap}(K_n)$.

(f) Soit ν comme dans l'énoncé. Si $\nu(K) > 0$, alors $\frac{\nu|_K}{\nu(K)} \in \mathcal{P}(K)$, donc comme $\mathrm{Cap}(K) = 0$, on a

$$I\left(\frac{\nu|_K}{\nu(K)}\right) = \frac{1}{\nu(K)^2} \int_K \int_K \log \frac{1}{|z-t|}\, \mathrm{d}\nu(t)\, \mathrm{d}\nu(z) = +\infty$$

Alors

$$\begin{aligned} I(\nu) &= \iint \log \frac{1}{|z-t|}\, \mathrm{d}\nu(t)\, \mathrm{d}\nu(z) \\ &= \left(\int\int_{(K\times K)^c} + \int_K \int_K\right) \log \frac{1}{|z-t|}\, \mathrm{d}\nu(t)\, \mathrm{d}\nu(z) \\ &\geqslant \left(1-\nu(K)^2\right) \log \frac{1}{\delta_2(\operatorname{supp}(\nu))} + \nu(K)^2 I\left(\frac{\nu|_K}{\nu(K)}\right) = +\infty \end{aligned}$$

qui est contredit par $I(\nu) < +\infty$.

Si $K \subset B(0,r)$, on a que $m_2|_{B(0,r)}(\mathbb{C}) = \pi r^2$ et que $I(m_2|_{B(0,r)}) < +\infty$. En effet, pour tout $z \in B(0,r)$,

$$\begin{aligned}\int_{B(0,r)} \log \frac{1}{|z-t|}\, \mathrm{d}m_2(t) &\leq \int_{B(z,2r)} \log \frac{1}{|z-t|}\, \mathrm{d}m_2(t) \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2r} \left(\log \frac{1}{\rho}\right) \rho\, \mathrm{d}\rho \leq 4\pi r \left\|\rho \log \rho\right\|_{L^\infty(]0,r])} < +\infty\end{aligned}$$

Donc on peut appliquer ce que l'on vient de prouver et on obtient alors $m_2(K) = 0$. □

Corollaire 2.2 Soit $a = (a_1 < \cdots < a_{2n})$ des nombres réels ordonnés de manière strictement croissante. Notons $E_a = \bigcup_{k=0}^{n-1} [a_{2k+1}, a_{2k+2}]$. La capacité de E_a varie continûment avec a.

Démonstration. Posons $d = \min_i\{a_{i+1} - a_i\}$. Soit $\varepsilon \in]0, d/2[$. Notons

$$a_{\varepsilon,+} = (a_1 - \varepsilon, a_2 + \varepsilon, \ldots a_{2n-1} - \varepsilon, a_{2n} + \varepsilon),\ a_{\varepsilon,-} = (a_1 + \varepsilon, a_2 - \varepsilon, \ldots a_{2n-1} + \varepsilon, a_{2n} - \varepsilon),$$

On a $E_{a_{\varepsilon,-}} \subset E_a \subset E_{a_{\varepsilon,+}}$.

La continuité à gauche (resp. à droite) de $\mathrm{Cap}(E_a)$ par rapport à a équivaut au fait que $\mathrm{Cap}(E_a) = \sup \mathrm{Cap}(E_{a_{\varepsilon,-}})$ (resp. $\mathrm{Cap}(E_a) = \inf \mathrm{Cap}(E_{a_{\varepsilon,+}})$). Les deux conditions sont assurées par les point (d) et (e) de la proposition précédente.

□

Définition 2.8 Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact. On note Ω_K la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\backslash K$. On définit la *borne extérieure* d'un compact $K \subset \mathbb{C}$ comme la borne de Ω_K dans $\mathbb{C}$:

$$\partial_\infty K := \partial\Omega_K$$

et la *clôture essentielle* comme le complémentaire de Ω_K dans $\mathbb{C}$:

$$K^{ce} := \mathbb{C}\backslash\Omega_K$$

Corollaire 2.3 Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact, alors :

(a) Si $\mathring{K}$ est non vide, alors $\mathrm{Cap}(K) > 0$; autrement dit, $\mathrm{Cap}(K) = 0$ implique $K = \partial K$;

(b) $\Omega_K = \Omega_{\partial K} = \Omega_{\partial_\infty K} = \Omega_{K^{ce}}$;

(c) $\partial_\infty K = \partial K^{ce}$, $K^{ce} \supset K \supset \partial_\infty K$;

(d) $\mathrm{Cap}(K^{ce}) = \mathrm{Cap}(\partial_\infty K) = \mathrm{Cap}(K) = \mathrm{Cap}(\partial K)$.

(e) Soit μ_K la mesure d'équilibre de K. Si $\mathrm{Cap}(K) > 0$, alors $\mathrm{supp}(\mu_K) \subset \partial_\infty K$ et $\mu_K = \mu_{K^{ce}} = \mu_{\partial_\infty K}$.

(f) Soit (K_n) une suite croissante de compacts dans $\mathbb{C}$, soit $B = \bigcup_n K_n$. Alors $\mathrm{Cap}(B) = \lim_n \mathrm{Cap}(K_n)$.

Démonstration. (a) résulte du calcul par rapport à la mesure de Lebesgue dans Prop. 2.4 (f).

(b) et (c) résultent aussitôt de la définition.

(d) se déduit alors de (c) et Prop. 2.4 (a),(c). Et (e) en découle, compte tenu de l'unicité (Thm. 2.2).

(f) Supposons tout K_n de capacité finie. Soit $K \subset B$ un compact. Alors $(K \cap K_n)$ est une suite croissante de compacts qui converge vers K, donc on a

$$\mathrm{Cap}(K) = \lim_n \mathrm{Cap}(K \cap K_n)$$

d'où $\mathrm{Cap}(B) \leq \lim_n \mathrm{Cap}(K_n)$. L'autre sens est trivial. □

2.3 Potentiels et fonctions semi-harmoniques

Pour une mesure de probabilité μ, le potentiel associé U^μ est une fonction à variable complexe appartenant à une famille de fonctions particulières : *les fonctions semi-harmoniques*. Ce sont des fonctions semi-continues vérifiant le principe du maximum/minimum. Les notions sur les fonctions semi-harmoniques sont rappelées dans l'annexe B.

En utilisant les propriétés de ces fonctions, nous allons établir quelques résultats importants sur les potentiels et capacités. Dans un premier temps, nous allons démontrer le théorème de Frostman (Thm. 2.5) qui affirme que le potentiel d'équilibre d'un compact K a essentiellement la forme d'un plateau sur K. Dans un deuxième temps, nous allons établir le théorème 2.8 qui affirme que sous certaines hypothèses de régularité, une fonction holomorphe transforme la capacité d'un compact selon son monôme dominant. Le théorème, avec ses deux corollaires 2.10, 2.11, fournissent un outil pratique de calcul des capacités.

Quelques démonstrations techniques sont regroupées dans l'annexe B.1.

2.3.1 • Théorème de Frostman

Pour commencer, nous rappelons la définition des fonctions semi-harmoniques et donnons deux exemples importants de fonctions surharmoniques dans notre cadre d'étude.

Définition 2.9 (Fonctions (sur-,sous-)harmoniques). Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite *harmonique* (*resp. surharmonique, sous-harmonique*) si elle est continue (*resp.* semi-continue inférieurement, semi-continue supérieurement) et si elle satisfait la *propriété de moyenne* (*resp. sur-moyenne, sous-moyenne*) : pour tout $z \in D$, si le disque $\{|\zeta - z| \leq r\} \subset D$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta \quad (resp.\ \geq, \leq)$$

Exemple 2.6 $g(z) = \log \frac{1}{|z-t|}$ est surharmonique et harmonique en $z \neq t$. □

Exemple 2.7 Soit μ une mesure positive à support dans un compact K, alors le potentiel

$$U^\mu(z) = \int \log \frac{1}{|z-t|}\, \mathrm{d}\mu(t)$$

est une fonction surharmonique sur $\mathbb{C}$ et harmonique sur $\mathbb{C}\backslash K$.

Démonstration. U^μ est semi-continue inférieurement puisque $\log \frac{1}{|z-t|}$ l'est pour tout paramètre t. En

utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U^\mu(z+re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\frac{1}{|z+re^{i\theta}-t|}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\mu(t).$$

Par l'exemple 2.6, cette dernière intégrale est inférieure à $\int \log\frac{1}{|z-t|}\,\mathrm{d}\mu(t) = U^\mu(z)$. Ainsi, U^μ est surharmonique sur $\mathbb{C}$. En prenant $z \notin K$ et $r < \mathrm{dist}(z,K)$, cette dernière intégrale est égale à $U^\mu(z)$ par l'exemple 2.6, d'où l'harmonicité. □

Théorème 2.4 (Principe du maximum pour les potentiels). Soit μ une mesure positive fini à support compact. Si $U^\mu(z) \leq M$ pour tout $z \in \mathrm{supp}(\mu)$, alors il en est de même pour tout $z \in \mathbb{C}$.

La preuve est donnée dans l'Annexe B, Corollaire B.1.

Énonçons et démontrons un théorème important sur les potentiels d'équilibre : le théorème de Frostman, qui affirme que le potentiel d'équilibre a une forme de plateau, et dominé partout par la constante de Robin (cf. Figure 7).

Théorème 2.5 (Frostman). Soit K un compact de $\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Cap}(K) > 0$ alors

1. $U^{\mu_K}(z) \leqslant V_K$ pour tout $z \in \mathbb{C}$
2. $U^{\mu_K}(z) = V_K$ pour tout $z \in K - S$ où $\mathrm{Cap}(S) = 0$
3. $U^{\mu_K}(z) < V_K$ pour tout $z \in \Omega$ où Ω est la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} - K$

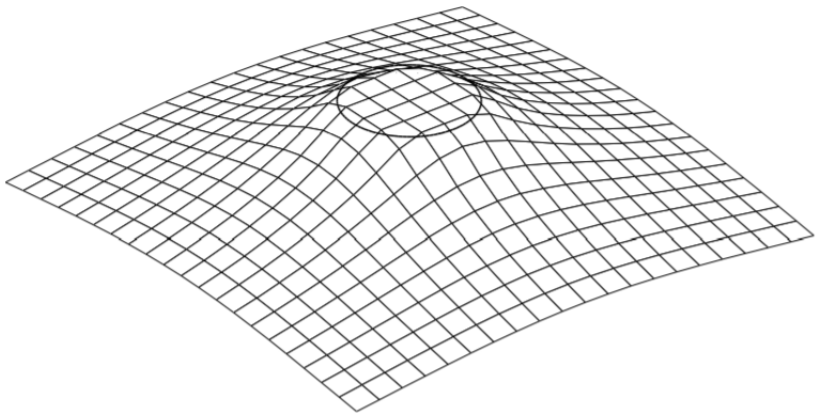


Figure 7 – Théorème de Frostman

Démonstration. La preuve de ce théorème se fait en trois temps. On définit d'abord pour $n \geq 1$ les ensembles $K_n = \{z \in K | U^{\mu_K} \leq V_K - 1/n\}$ et $L_n = \{z \in \mathrm{support}\,(\mu_K)\,|U^{\mu_K}(z) > V_K + 1/n\}$. On va d'abord montrer que les K_n sont de capacité nulle, puis que les L_n sont vides, avant de conclure sur le résultat par le principe du maximum pour les potentiels (2.4).

Montrons par l'absurde que $\mathrm{Cap}(K_n) = 0$, supposons qu'il existe $n \geq 1$ tel que $\mathrm{Cap}(K_n) > 0$. On rappelle que $V_K = I(\mu_K) = \int U^{\mu_K} d\mu_K$, donc, il existe un certain z_0 dans le support de μ_K vérifiant $U^{\mu_K}(z_0) \geq V_K$. En utilisant la semi-continuité inférieure de U^{μ_K}, il existe une boule fermée notée B de rayon $r > 0$ centrée en z_0 sur laquelle on a $U^{\mu_K}(z) > V_K - 1/2n$. Alors, on a $B \cap K_n = \emptyset$, et $\mu_K(B) = a > 0$ car z_0 est dans le support de μ_K. Pour obtenir une contradiction, on veut construire une mesure qui contredise la minimalité de V_K, et on va se servir de la supposition $\mathrm{Cap}(K_n) > 0$ pour cela. En effet, on peut considérer sous cette hypothèse une mesure μ sur K_n telle que $I(\mu)$ soit fini. On construit alors la mesure

$$\sigma = \begin{cases} \mu, & \text{sur } K_n \\ -\mu_K/a, & \text{sur } B \\ 0, & \text{sur le reste du domaine} \end{cases}$$

On considère alors la famille de mesures $\mu_t = \mu_K + t\sigma$ pour $t \in]0; a[$ qui sont positives et de masse 1 (la positivité est évidente car $t/a \in]0;1[$, pour la masse, elle vaut $a - t$ sur B, et $a - 1 + t$ sur le reste de K). Par construction de B, on a après calcul :

$$I(\mu_K) - I(\mu_t) \geq 2t\left(V_K - 1/2n - V_K + 1/n\right) + O\left(t^2\right)$$

Donc pour t assez proche de 0 (on rappelle que n est fixé), on a bien $I(\mu_K) = V_K \geq I(\mu_t)$, ce qui contredit la minimalité de μ_K car ici, $\mu_t \neq \mu_K$.

Montrons dans un deuxième temps par l'absurde également que $L_n = \emptyset$. Si l'un des L_n n'est pas vide, par le même raisonnement que précédemment, il existe une boule fermée $\tilde{B}$ dans laquelle $U^{\mu_K}(z) > V_K + 1/n$. Comme ci-dessus, on pose $\tilde{a} = \mu_K(\tilde{B}) > 0$. D'après le point précédent, on a pour tout n, $\mu_K(K_n) = 0$, donc, $U^{\mu_K}(z) \geq V_K$ sauf sur un ensemble de mesure nulle. On a alors :

$$\begin{aligned} V_K = I(\mu_K) &= \int_K U^{\mu_K} d\mu_K \\ &= \int_{\tilde{B}} U^{\mu_K} d\mu_K + \int_{K \setminus \tilde{B}} U^{\mu_K} d\mu_K \\ &\geq \left(V_K + \frac{1}{n}\right)\tilde{a} + V_K(1 - \tilde{a}) > V_K \end{aligned}$$

On obtient donc une contradiction, et les L_n sont bien vides.

Ces deux faits nous permettent de prouver les trois assertions du théorème : comme tous les L_n sont vides, on a l'inégalité du point 1 sur le support de μ_K, donc sur $\mathbb{C}$ par le principe du maximum. Le point 2 vient du fait que $\mathrm{Cap}(\bigcup_n K_n) = 0$ qui donne que $U^{\mu_K}(z) \geq V_K$ sur $K \setminus \bigcup_n K_n$, et du point 1 qui dit que $U^{\mu_K}(z) \leq V_K$. Enfin, le dernier point est une conséquence du caractère harmonique de U^{μ_K} sur la composante Ω.

□

Exemple 2.8 Quand $K = \mathbb{U}$ (Prop. 2.5), le potentiel $U^{\mu_{\mathbb{U}}}(z) = \begin{cases} 0 = V_{\mathbb{U}} \text{ si } |z| \leqslant 1 \\ \log(\frac{1}{|z|}) \text{ si } |z| > 1 \end{cases}$ vérifie le théorème de Frostman avec $S = \emptyset$.

Corollaire 2.4 Soient $K \subset \mathbb{C}$ un compact avec $\mathrm{Cap}(K) > 0$ et μ_K sa mesure d'équilibre. Alors $U^{\mu_K} \equiv V_K$ dans l'intérieur de K. De plus, comme $\mu_K = \mu_{K^{ce}}$ (Cor. 2.3(e)), on a $U^{\mu_K} \equiv V_K$ dans l'intérieur de K^{ce}.

Démonstration. Le théorème de Frostman implique

$$U^{\mu_K}(z) = V_K, \quad q.t.\ z \in \partial K$$

D'autre part, U^{μ_K} est surharmonique et bornée inférieurement par $\log(1/d_2(K))$ dans K. Alors le principe du minimum généralisé s'applique à U^{μ_K} sur chaque composant connexe de $\mathring{K}$ et on obtient $U^{\mu_K} \geq V_K$ dans $\mathring{K}$. Or, le théorème de Frostman a déjà donné une borne supèrieure V_K. Donc $U^{\mu_K} = V_K$ dans $\mathring{K}$. □

2.3.2 • Calcul de capacité

L'objectif de la section est le théorème 2.8, qui affirme qu'une fonction holomorphe transforme la capacité selon son monôme dominant, et établir deux corollaires qui servent d'outils de calcul de capacité.

L'outil principal de la démonstration est la fonction de Green d'un compact.

Théorème 2.6 Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact avec $\mathrm{Cap}(K) > 0$ et Ω_K le composant connexe non borné de $\mathbb{C}\backslash K$. Alors il existe une *unique* fonction $g_K(\cdot, \infty) : \Omega_K \to \mathbb{R}$ *caractérisée* par les propriétés suivantes :

1. $g_K(\cdot, \infty)$ est harmonique dans Ω_K est bornée hors de tous les voisinages de ∞ ;
2. $g_K(\cdot, \infty) - \log|\cdot|$ est bornée dans un voisinage de ∞ ;
3. $\lim_{z \to \zeta} g_K(z, \infty) = 0$ pour $q.t.\ \zeta \in \partial\Omega_K$.

Démonstration. L'existence est donnée par le théorème de Frostman et l'exemple 2.7 si l'on pose

$$g_K(z, \infty) = V_K - U^{\mu_K}(z). \tag{1}$$

Soit $g(z), g'(z)$ deux fonctions satisfaisant ces trois propriétés, alors $g(z) - g'(z)$ est harmonique et bornée sur Ω_K, donc peut s'étendre à une fonction harmonique sur $\Omega_K \cup \{\infty\}$. Selon la deuxième condition, on a $g(z) > 0$ (*resp.* $g'(z) > 0$) pour $R \gg 0$ de sorte que $K \subset B(0, R)$ et pour tout $|z| = R$; le principe du minimum généralisé appliqué à $\Omega_K \cap B(0, R)$ entraîne $g(z) > 0$ (*resp.* $g'(z) > 0$) dans $\Omega_K \cap B(0, R)$, par suite aussi dans Ω_K. L'unicité résulte alors de la troisième propriété et du principe du minimum généralisé appliqué deux fois à $\Omega_K \cup \{\infty\}$ respectivement pour $g(z) - g'(z)$ et $g'(z) - g(z)$. □

Définition 2.10 On appelle $g_K(\cdot, \infty) : \Omega_K \to \mathbb{R}$ *la fonction de Green pour* K *avec pôle à l'infini.*

Corollaire 2.5 Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact tel que $\mathrm{Cap}(K) > 0$. On a alors $g_K(\cdot, \infty) > 0$ dans Ω_K.

Corollaire 2.6 Si deux compact $K_1, K_2 \subset \mathbb{C}$ sont tels que $\mathrm{Cap}(K_1) > 0$ ou $\mathrm{Cap}(K_2) > 0$, et que $\Omega_{K_1} = \Omega_{K_2}$, alors

$$g_{K_1}(\cdot, \infty) = g_{K_2}(\cdot, \infty).$$

En particulier, soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact avec $\mathrm{Cap}(K) > 0$, alors

$$g_K(\cdot, \infty) = g_{\partial K}(\cdot, \infty) = g_{\partial_\infty K}(\cdot, \infty) = g_{K^{ce}}(\cdot, \infty).$$

Démonstration. Notons que les trois propriétés dans Thm. 2.6 ne dépendent que de Ω_K, à savoir la

composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\backslash K$; ainsi le résultat vient directement de la définition et du Cor. 2.3. □

Théorème 2.7 Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact avec $\mathrm{Cap}(K) > 0$ et $g_K(\cdot, \infty)$ la fonction de Green pour K avec le pôle à l'infini. Alors

1. $g_K(z, \infty) = \log|z| + V_K + o_{z\to\infty}(1)$;
2. le potentiel d'équilibre de K est $U^{\mu_K} = V_K - g_K(\cdot, \infty)$; puis (Thm. 2.5) $g_K(\cdot, \infty) > 0$ dans Ω_K.

Démonstration. Cela découle aussitôt de la relation (1) donnée dans la preuve du théorème 2.6 et la définition du potentiel U^{μ_K}. □

Maintenant, nous allons définir la notion de régularité d'un compact. Nous verrons plus tard que c'est une bonne hypothèse pour relier la capacité de deux compacts et grâce à la Prop 2.7, il s'agit d'un cas auquel on pourra se ramener.

Définition 2.11 Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact tel que $\mathrm{Cap}(K) > 0$. On appelle $\zeta_0 \in \partial\Omega_K$ un *point régulier* si

$$\lim_{\Omega_K \ni z \to \zeta_0} U^{\mu_K}(z) = V_K;$$

dans le cas contraire, on dira que ζ_0 est un *point irrégulier*. On dit que Ω_K est *régulier* si tous les points de $\partial\Omega_K$ sont réguliers.

D'après la relation entre le potentiel et la fonction de Green (Thm. 2.7), on a la caractérisation suivante :

Corollaire 2.7 Un point $\zeta_0 \in \partial\Omega_K$ est régulier si et seulement si $\lim_{z\to\zeta_0} g_K(z, \infty) = 0$.

Proposition 2.5 Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact tel que $\mathrm{Cap}(K) > 0$. Alors $U^{\mu_K}(\zeta_0) = V_K$ implique la continuité de U^{μ_K} en ζ_0. La réciproque est vraie si $\zeta_0 \in \mathrm{supp}(\mu_K)$.

Démonstration. La semi-continuité de U^{μ_K} et le théorème de Frostman donnent :

$$U^{\mu_K}(\zeta_0) \le \liminf_{z\to\zeta_0} U^{\mu_K}(z) \le \limsup_{z\to\zeta_0} U^{\mu_K}(z) \le V_K.$$

Donc si $U^{\mu_K}(\zeta_0) = V_K$, U^{μ_K} est continue en ζ_0.

Inversement, si U^{μ_K} est continue en ζ_0 et $U^{\mu_K}(\zeta_0) < V_K$, alors il existe $r > 0$ tel que $U^{\mu_K} < V_K$ sur $\overline{B(\zeta_0, r)}$, donc selon le théorème de Frostman, $\mathrm{Cap}(\overline{B(\zeta_0, r)}) \cap K) \le \mathrm{Cap}(S) = 0$, alors selon Prop. 2.4(f), on a

$$\mu_K(\overline{B(\zeta_0, r)} \cap K) = 0.$$

Donc $\mu_K(\overline{B(\zeta_0, r)}) = 0$ et on en déduit que $\zeta_0 \notin \mathrm{supp}(\mu_K)$. □

Corollaire 2.8 Soit $\zeta_0 \in \mathrm{supp}(\mu_K)$ alors pour tout $r > 0$, $\mathrm{Cap}(B(\zeta_0, r) \cap K) > 0$.

Démonstration. C'est en effet la contraposée du dernier raisonnement de la démonstration ci-dessus. □

Corollaire 2.9 L'ensemble des points irréguliers est de capacité 0.

Démonstration. On peut supposer $\mathrm{Cap}(K) > 0$. Alors le corollaire découle du théorème de Frostman. □

Pour obtenir une condition suffisante de régularité, on introduit la notion suivante :

Définition 2.12 Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$. On dit que Ω satisfait la *condition de cône* si pour tout $\zeta \in \partial\Omega$, il existe $\zeta_1 \neq \zeta$ tel que le segment $[\zeta, \zeta_1] \subset \mathbb{C}\backslash\Omega$.

Proposition 2.6 Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact avec $\mathrm{Cap}(K) > 0$. Si Ω_K satisfait la condition de cône, alors Ω_K est régulier.

Nous renvoyons le lecteur à la section C.1 pour la démonstration.
La proposition suivante sera utile pour la réduction au cas d'un domaine régulier.

Proposition 2.7 Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact non vide et notons $K^\epsilon = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{dist}(z, K) \leq \epsilon\}$. Alors $\mathrm{Cap}(K^\epsilon) > 0$ et Ω_{K^ϵ} satisfait la condition de cône, donc Ω_{K^ϵ} est régulier.

Démonstration. Comme l'intérieur de K^ϵ est non vide, on a $\mathrm{Cap}(K^\epsilon) > 0$. De plus, par définition, tout point ζ dans ∂K^ϵ est à une distance exactement ϵ de K, donc il existe $\zeta_1 \in K$ tel que $[\zeta, \zeta_1] \subset K^\epsilon \subset \mathbb{C}\backslash\Omega_K$. □

Nous allons ici démontrer quelques résultats permettant de comparer et de relier les capacités de deux compacts grâce aux fonctions holomorphes et à la notion de régularité prédécemment définie.

Lemme 2.3 Soit f une application holomorphe non constante localement définie en ∞ telle que $f(\infty) = \infty$. Alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un $A \neq 0$ tels que

$$f(z) \sim Az^n, \quad z \to \infty$$

$$\log|f(z)| = n\log|z| + \log|A| + o(1), \quad z \to \infty$$

On définit alors $A_f = A, n_f = \mathrm{ord}_\infty(f) = n$. □

Théorème 2.8 Soit $K_1, K_2 \subset \mathbb{C}$ deux compacts non vides. Soit $f : \Omega_{K_1} \cup \{\infty\} \to \Omega_{K_2} \cup \{\infty\}$ une application holomorphe non constante telle que $f(\infty) = \infty$. Alors,

(a) $|A_f|\,\mathrm{Cap}(K_1)^{n_f} \geq \mathrm{Cap}(K_2)$.

(b) Supposons en plus que :

(i) $\mathrm{Cap}(K_2) > 0$;
(ii) $f^{-1}(\infty) = \{\infty\}$;
(iii) Ω_{K_2} soit régulier ;
(iv) f se prolonge continûment aux bords $\partial\Omega_{K_1} \to \partial\Omega_{K_2}$.

Alors, $\mathrm{Cap}(K_1)>0$, Ω_{K_1} est régulier et

$$g_{K_1}(\cdot,\infty) = \frac{1}{n_f} g_{K_2}(f(\cdot),\infty)$$

$$|A_f|\,\mathrm{Cap}(K_1)^{n_f} = \mathrm{Cap}(K_2).$$

La démonstration complète du théorème est présentée dans l'annexe B.1.

Pour comprendre le cadre d'application du théorème, on se demande quand les conditions dans (b) sont satisfaites :

(ii) est vraie lorsque f est biholomorphe, ou que f est donnée par un polynomial ;

(iii) se réalise lorsque Ω_K satisfait la condition de cône (Prop. 2.6). On obtient donc les deux corollaires suivants (en appliquant la technique de Prop. 2.7 si nécessaire) :

Corollaire 2.10 Si f est biholomorphe, on aura $n_f = n_{f^{-1}} = 1$ et $A_f A_{f^{-1}} = 1$; appliquons (a) deux fois et on obtient (avec notation $f'(\infty) = A_f$)

$$|f'(\infty)|\,\mathrm{Cap}(K_1) = \mathrm{Cap}(K_2).$$

□

Corollaire 2.11 Supposons que f soit une application polynomiale de degré n :

$$f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad a_n \neq 0.$$

Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact. Alors

$$|a_n|\,\mathrm{Cap}(f^{-1}(K))^n = \mathrm{Cap}(K).$$

Démonstration. Supposons que $K \neq \emptyset$. On va chercher à applique le Théorème 2.8 (b). Comme f est une application polynomiale, (ii) est satisfaite pour tout compact dans $\mathbb{C}$. Pour $\epsilon > 0$, soit $K^\epsilon = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{dist}(z,K) \leq \epsilon\}$. Montrons que les conditions (i),(iii),(iv) du théorème sont satisfaites pour les compacts $f^{-1}(K^\epsilon)$ et K^ϵ et que $f(\Omega_{f^{-1}(K^\epsilon)}) \subset \Omega_{K^\epsilon}$; ce théorème donnera alors

$$|a_n|\,\mathrm{Cap}(f^{-1}(K^\epsilon))^n = \mathrm{Cap}(K^\epsilon).$$

Lorsque $\epsilon \to 0$, cela nous permet de conclure.

(i) K^ϵ a un intérieur non vide, donc $\mathrm{Cap}(K^\epsilon) > 0$ (Cor. 2.3).

(iii) résulte de la Prop. 2.6 et la Prop. 2.7.

(iv) On va en fait montrer ce point pour tout compact K (au lieu de K^ϵ. Une vérification topologique montre que $f(\partial f^{-1}(K)) = \partial K$. Il nous reste à montrer que $f(\partial\Omega_{f^{-1}(K)}) \subset \partial\Omega_K$. On a $f(\infty) = \infty$ et K compact, donc $f^{-1}(K)$ est compact ; de même, l'image réciproque de chaque composante (ouverte) connexe bornée de $\mathbb{C}\backslash K$ est bornée, donc contenue dans l'une des composantes bornées de $f^{-1}(K)$. Donc $\Omega_{f^{-1}(K)} \subset f^{-1}(\Omega_K)$, puis

$$f(\Omega_{f^{-1}(K)}) \subset \Omega_K$$

$$f(\partial\Omega_{f^{-1}(K)}) \subset \overline{\Omega_K}.$$

On arrive enfin à

$$f(\partial\Omega_{f^{-1}(K)}) \subset \overline{\Omega_K} \cap \partial K = \partial\Omega_K,$$

ce qui permet d'appliquer le Théorème 2.8 (b) et le résultat s'en déduit. □

2.4 Constante de Tchebychev

Nous allons ici étudier une troisième définition équivalente de la capacité, définie à partir des polynômes de Tchebychev. Nous allons voir que ce point de vue est particulièrement commode pour calculer la capacité de certains compacts, en particulier les segments de $\mathbb{R}$.

Nous commençons ici par énoncer le théorème d'équioscillation :

Théorème 2.9 (Equioscillation). Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. P minimise $||f-P||_{\infty,[a,b]}$ si et seulement s'il existe $n+2$ points $a \leqslant x_0 < x_1 < \dots x_{n+1} \leqslant b$ tels que $f(x_i) - P(x_i) = \pm(-1)^i ||f-P||_{\infty,[a,b]}$

La démonstration de ce théorème n'est pas très complexe mais assez longue. Afin de ne pas alourdir ce mémoire, nous renvoyons le lecteur curieux à l'article [8] pour une démonstration complète et illustrée.

Définition 2.13 (Constante de Tchebychev). Pour $n \in \mathbb{N}$ et K une partie compacte de $\mathbb{C}$, on note $||\cdot||_K$ la norme infinie sur K et :

$$t_n(K) = \inf_{P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]} ||X^n + P||_K.$$

Si K contient un nombre infini de points, il existe un unique polynôme unitaire $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$, appelé polynôme de Tchebychev tel que $t_n(K) = ||T_n||_K$.

On définit la constante de Tchebychev par :

$$\mathrm{Cheb}(K) = \lim_{n \to +\infty} t_n(K)^{\frac{1}{n}}.$$

Démonstration.

— Si K est infini, $||\cdot||_K$ est une norme sur $\mathbb{C}[X]$. L'existence de T_n découle du fait que la distance à un sous-espace vectoriel fermé est atteinte. L'unicité vient du sens réciproque du théorème d'équioscillation (2.9).

— Soit $n, m \in \mathbb{N}$. Comme $T_n T_m$ est unitaire de degré $n+m$, on a

$$||T_{n+m}||_K = \inf_{\substack{P \in \mathbb{C}_{n+m}[X] \\ \text{unitaire}}} ||P||_K \leqslant ||T_n T_m||_K \leqslant ||T_n||_K ||T_m||_K$$

On en déduit $t_{n+m}(K) \leqslant t_n(K) t_m(K)$ et $(\log(t_n(K)))_{n\in\mathbb{N}}$ est sous-additive. Par le lemme sous-additif, $(\frac{1}{n}\log(t_n(K)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge ce qui montre que $\mathrm{Cheb}(K)$ est bien définie.

□

La notion de constante de Tchebychev que nous venons de définir est parfaitement équivalente à celles de capacité logarithmique et de diamètre transfini :

Théorème 2.10 Soit K une partie compacte de $\mathbb{C}$ alors

$$\tau(K) = \mathrm{Cap}(K) = \mathrm{Cheb}(K).$$

Soit $\mathcal{F}_n = \{z_1^{(n)}, \dots, z_n^{(n)}\}$ un ensemble de n points de Fekete et $F_n(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - z_n^{(i)})$ le polynôme de Fekete associé. On a

$$\lim_{n\to+\infty} ||F_n||_K^{1/n} = \mathrm{Cheb}(K).$$

De plus, si $\mathrm{Cap}(K) > 0$, en notant μ_K la mesure d'équilibre sur K, on a

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash K, \lim_{n\to+\infty} F_n(z)^{\frac{1}{n}} = \exp(-U^{\mu_K}(z))$$

La convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}\backslash K$.

Démonstration. On montre le résultat par double inégalité en s'appuyant sur le théorème 2.3.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ et $\mathcal{F}_n = \{z_1^{(n)}, \dots, z_n^{(n)}\}$ un ensemble de n points de Fekete.
En posant $\{y_1, \dots, y_{n+1}\} = \{z_1^{(n)}, \dots, z_n^{(n)}, z\}$

$$\delta_{n+1}(K)^{n(n+1)/2} = \max_{\{y_1,\dots,y_{n+1}\}\subset K} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} |y_i - y_j| \geqslant \prod_{i=1}^{n} |z - z_i^{(n)}| \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} |z_i^{(n)} - z_j^{(n)}|$$

Notons $F_n = \prod_{i=1}^{n}(X - z_i^{(n)})$. Comme $\mathcal{F}_n$ est un ensemble de Fekete :

$$\delta_{n+1}(K)^{n(n+1)/2} \geqslant |F_n(z)|\delta_n(K)^{(n-1)n/2}.$$

Et en prenant le $\sup_{z\in K}$, on obtient $||F_n||_K \leqslant \left(\frac{\delta_{n+1}(K)}{\delta_n(K)}\right)^{(n-1)n/2} \delta_{n+1}^n(K)$. Or les $\delta_n(K)$ sont décroissants donc $||F_n||_K^{1/n} \leqslant \delta_{n+1}(K)$. De plus par définition $t_n(K) \leqslant ||F_n||_K^{1/n} \leqslant \delta_{n+1}(K)$. Finalement en passant à la limite on a

$$\tau(K) \geqslant \limsup_{n\to\infty} ||F_n||_K^{1/n} \geqslant \liminf_{n\to\infty} ||F_n||_K^{1/n} \geqslant \mathrm{Cheb}(K).$$

— Pour terminer la preuve, il suffit de montrer que $\mathrm{Cheb}(K) \geqslant \tau(\mathrm{K})$. Si $\tau(K) = 0$ c'est trivial, sinon K contient un nombre infini de points et on peut considérer $T_n = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$ le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Tchebychev de K et $\nu(T_n)$ la mesure de comptage en $x_1, \dots, x_n$.
Par décroissance de $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \log\frac{1}{x}$,

$$\frac{1}{n}\log\frac{1}{t_n(K)} = \inf_{z\in K}\frac{1}{n}\log\frac{1}{|T_n(z)|} = \inf_{z\in K}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{1}{|z - x_i|} = \inf_{z\in K} U^{\nu(T_n)}(z).$$

Par le prop A.3 on a :

$$\inf_{z\in K} U^{\nu(T_n)}(z) = \mu_K(\inf_{z\in K} U^{\nu(T_n)}(z)) \leqslant \mu_K(U^{\nu(T_n)}).$$

Puis,

$$\mu_K(U^{\nu(T_n)}) = \mu_K(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{1}{|z-x_i|}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_K(\log\frac{1}{|z-x_i|}) = \nu(T_n)(U^{\mu_K})$$

Par le théorème de Frostman 2.5, on a

$$\frac{1}{n}\log\frac{1}{t_n(K)} \leqslant \nu(T_n)(U^{\mu_K}) \leqslant V_K.$$

Finalement en faisant tendre $n \to +\infty$ et en composant par $x \mapsto e^{-x}$, on obtient :

$$\mathrm{Cheb}(K) \geqslant \mathrm{Cap}(K) = \tau(K),$$

ce qui achève le premier point du théorème.

— Notons maintenant $f_n(z) = \log(|F_n(z)|^{1/n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log|z-t_k|$ où $t_1, \ldots, t_n$ sont les racines de F_n. Soit L une partie compacte de $\mathbb{C} - K$, alors :

$$\forall t \in K, \forall z \in L, \log d(L,K) \leqslant \log|z-t| \leqslant \log \sup_{z' \in L, t' \in K}|z'-t'|.$$

Or par compacité de L et K, $d(L,K) \geqslant 0$ et $\sup_{z' \in L, t' \in K}|z'-t'| < \infty$.
De plus, on a

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in L,\ |f_n(z)| &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\log\left(\frac{1}{d(L,K)} + \sup_{z' \in L, t' \in K}|z'-t'|\right)\right| \\ &\leqslant \left|\log\left(\frac{1}{d(L,K)} + \sup_{z' \in L, t' \in K}|z'-t'|\right)\right| < \infty.\end{aligned}$$

donc les f_n sont bornées uniformément en z et n sur L. Ainsi, f_n est une suite de fonctions holomorphes, uniformément bornée sur tout compact et qui converge simplement sur $\mathbb{C}\backslash K$. Par le théorème de Vitali, la convergence est uniforme sur tout compact.

□

Cette nouvelle définition de la capacité permet de calculer facilement la capacité d'un segment.

Exemple 2.9 (Capacité d'un segment). La capacité d'un segment de longueur $2l$ vaut $\frac{l}{2}$.

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord la preuve dans le cas où le segment est centré en 0, de la forme $[-l, l]$.
On appelle $\tilde{T_n}$ l'unique polynôme vérifiant :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \tilde{T_n}(l\cos(\theta)) = lcos(n\theta)$$

La norme infinie de $\tilde{T_n}$ vaut évidemment l. Et de même que dans le cas classique $[-1,1]$, on démontre facilement que notre polynôme atteint alternativement $\pm l$ en $n+1$ points distincts. (1)
En utilisant la formule de Moivre sur les complexes, on démontre que $\tilde{T_n}$ est de coefficient dominant $c := (\frac{2}{l})^{n-1}$.
Chercher à minimiser $\|P\|_{[-l,l]}$, pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$ unitaire, revient à minimiser $\|X^n - Q\|_{[-l,l]}$ pour Q parcourant $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. Autrement dit, on cherche la distance de X^n à $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. Posons $Q^\star := X^n - \frac{1}{c}\tilde{T_n}(X)$. On a évidemment que $Q^\star \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Par ailleurs, $X^n - Q^\star = \frac{1}{c}\tilde{T_n}(X)$, qui équioscille en

$n+1$ points d'après (1). Donc, d'après le lemme 2.1, $Q^\star$ minimise la distance de X^n aux polynômes de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. Donc $\frac{1}{c}\tilde{T}_n$ est le polynôme de Tchebychev de $[-l,l]$.
D'où $t_n([-l,l]) = \|\frac{1}{c}\tilde{T}_n(X)\| = \frac{l}{c} = l(\frac{l}{2})^{n-1}$.
Ainsi, $\mathrm{Cheb}([-l,l]) = \lim\limits_{n\to\infty} t_n([-l,l])^{\frac{1}{n}} = \frac{l}{2}$.

- Dans le cas général d'un segment $[a,b]$ de largeur $2l$, non nécessairement centré en 0, il suffit de considérer la fonction polynomiale $\tilde{T}_n(X-(a+l))$ qui sur $[a,b]$ aura même comportement que $\tilde{T}_n$ sur $[-l,l]$. Ainsi, la capacité n'est pas modifiée par la translation. D'où $\mathrm{Cheb}([a,b]) = \frac{l}{2}$.

□

Nous allons maintenant calculer la capacité d'une réunion de deux segments qui sont symétriques par rapport à l'origine 0.

Exemple 2.10 Soit $0 \leqslant b < a$. Alors $\mathrm{Cheb}([-a,-b]\cup[b,a]) = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}$.

Démonstration. Pour F une partie compacte infinie de $\mathbb{C}$ on note T_n^F le polynôme de Tchebychev de degré n de F. Soit $E = [-a,-b]\cup[b,a]$.

— Soit $k\in\mathbb{N}$. Montrons que T_{2k}^E est pair.

$$\left\|\frac{T_{2k}^E(X)+T_{2k}^E(-X)}{2}\right\|_E \leqslant \frac{1}{2}(\left\|T_{2k}^E(X)\right\|_E + \left\|T_{2k}^E(-X)\right\|_E)$$

Or E est symétrique par rapport à 0 donc

$$\left\|T_{2k}^E(-X)\right\|_E = \sup_{z\in E}\left|T_{2k}^E(-z)\right| = \sup_{z\in E}\left|T_{2k}^E(z)\right| = \left\|T_{2k}^E(-X)\right\|_E.$$

Ainsi $\left\|\frac{T_{2k}^E(X)+T_{2k}^E(-X)}{2}\right\|_E \leqslant \left\|T_{2k}^E\right\|_E$ et par unicité du polynôme de Chebsychev, $T_{2k}^E = \frac{T_{2k}^E(X)+T_{2k}^E(-X)}{2}$.
Ainsi T_{2k}^E est paire.

— On déduit de ce qui précède que T_{2k}^E est de la forme $q(X^2)$ avec $q\in\mathcal{P}_k$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré k. Alors :

$$\begin{aligned} t_{2k}(E) &= \inf_{q\in\mathcal{P}_k}\sup_{x\in E}|q(x^2)| \\ &= \inf_{q\in\mathcal{P}_k}\sup_{x^2\in[b^2,a^2]}|q(x^2)| \\ &= \inf_{q\in\mathcal{P}_k}\sup_{y\in[b^2,a^2]}|q(y)|. \end{aligned}$$

Donc $T_{2k}^E = T_k^{[b^2,a^2]}(X^2)$. Or dans l'exemple 2.9 on a vu que $(\frac{2}{l})^{k-1}T_k^{[-l,l]}(l\cos(\theta)) = l\cos(k\theta)$. Donc en posant $x = l\cos(\theta)$, on a :

$$T_k^{[-l,l]}(x) = \frac{l^k}{2^{k-1}}\cos\left(k\arccos\left(\frac{x}{l}\right)\right).$$

Puis par translation on obtient :

$$T_k^{[b^2,a^2]}(x) = \frac{(a^2-b^2)^k}{2^{2k-1}}\cos\left(k\arccos\left(2\frac{x-b^2}{a^2-b^2}-1\right)\right).$$

Et finalement $T_{2k}^E(x) = \frac{(a^2-b^2)^k}{2^{2k-1}} \cos\left(k \arccos\left(2\frac{x^2-b^2}{a^2-b^2} - 1\right)\right)$.

— $t_{2k}(E) = \left\|T_{2k}^E\right\|_E = 2\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}\right)^{2k}$. D'où

$$\mathrm{Cheb}(E) = \lim_{k\to\infty} t_{2k}(E)^{\frac{1}{2k}} = \lim_{k\to\infty} \left(2\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}\right)^{2k}\right)^{\frac{1}{2k}} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}.$$

□

3
THÉORÈME DE FEKETE. THÉORÈME DE FEKETE-SZEGÖ

Après avoir présenté la notion de capacité et démontré l'équivalence entre les trois définitions (points de vue diamètre transfini/potentiel/polynôme de Tchebychev), nous allons nous intéresser à la façon dont cette notion nous renseigne sur la finitude/l'infinitude d'entiers algébriques totalement dans un compact donné. Le but de cette section est de démontrer le théorème de Fekete (Thm. 3.1) et le théorème de Fekete-Szegö (Thm. 3.3) : le premier affirme que si la capacité d'un compact est strictement inférieur à 1, alors le nombre d'entiers algébriques totalement dedans est fini ; le second stipule que si la capacité d'un compact est supérieure à 1, on peut trouver une infinité d'entiers algébriques totalement dans tout voisinage (au sens de $\mathbb{C}$) du compact.

3.1 Théorème de Fekete

Cette section est consacrée à la démonstration du théorème de Fekete.

Théorème 3.1 (Fekete). Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact avec $\mathrm{Cap}(K) < 1$. Alors il existe un voisinage ouvert U de K tel que l'ensemble des entiers algébriques totalement dans U est fini. En particulier, il n'y a qu'un nombre fini d'entiers algébriques totalement dans K.

La démonstration de ce théorème vient essentiellement du fait que $\tau(K) = \mathrm{Cap}(K)$.

Démonstration. Il suffit de montrer la dernière assertion ; en effet, comme $\mathrm{Cap}(K) < 1$, on obtient $\mathrm{Cap}(K^\epsilon) < 1$ pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, où $K^\epsilon = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{dist}(z, K) \leq \epsilon\}$; pour un tel ϵ, $U = \overset{\circ}{K^\epsilon}$ satisfait la condition dans l'énoncé. Supposons alors que l'ensemble E_K des entiers algébriques totalement dans K soit infini, et cherchons une contradiction.

Commençons par le cas où les degrés de tous les polynômes minimaux p de $\zeta \in E_K$ sont bornés, par exemple par un entier $N > 0$. Alors le coefficient du terme $X^{\deg(p)-i}$ est borné par

$$\binom{\deg(p)}{i} \|K\|_\infty^i \leq \binom{N}{i} \|K\|_\infty^i, \quad \text{où } \|K\|_\infty = \max_{z \in K} |z| .$$

Il y a donc un nombre fini de tels polynômes minimaux, d'où $\#E_K < \infty$, ce qui contredit l'hypothèse.

Dans le cas contraire, il existe alors une suite de $d_n \in E_K$ telle que la suite $d_n = \deg(p_n)$ est strictement croissante, où $p_n \in \mathbb{Z}[X]$ est le polynôme minimal (unitaire) de ζ_n. Rappelons la notion de n-distance (Définition 2.1) :

$$\delta_n(K) = \max_{z_1, \ldots, z_n \in K} \prod_{i<j} |z_i - z_j|^{2/n(n-1)}$$

Et la capacité comme le diamètre transfini :

$$\tau(K) = \lim_{n \to +\infty} \delta_n(K)$$

Remarquons que

$$\delta_{d_n}(K)^{d_n(d_n-1)} \geq \left| \prod_{\xi \neq \eta \in \mathrm{Gal}(\zeta_n)} (\xi - \eta) \right| = \left| \prod_{\xi \in \mathrm{Gal}(\zeta_n)} p_n'(\xi) \right| \geqslant 1$$

L'égalité du milieu vient du fait que p_n n'a que des racines simples. Par ailleurs, étant une combinaison symétrique à coefficients entiers des ξ (les racines de p_n), $\prod_{\xi \in \mathrm{Gal}(\zeta_n)} p_n'(\xi)$ est un entier d'après la remarque 1.4, non nul car les racines sont simples, donc supérieur à 1.

Ainsi $\delta_{d_n}(K) \geq 1$, d'où $\tau(K) \geq 1$ en passant à la limite $n \to +\infty$, ce qui entraîne une contradiction car $\tau(K) = \mathrm{Cap}(K) < 1$. □

3.2 Théorème de Fekete-Szegö

Cette section est consacrée à la démonstration du théorème de Fekete-Szegö 3.3. Définissons d'abord un ensemble qui joue un rôle important dans la suite, la *lemniscate de Hilbert* :

Définition 3.1 Soit $p \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme *unitaire* de degré $d > 0$ et soit $\rho \in \mathbb{R}_+^\star$ une constante réelle. La *lemniscate de polynôme p et constante ρ* est l'ensemble

$$L = L_{p,\rho} = p^{-1}\big(\overline{B}(0, \rho^d)\big) = \{z \in \mathbb{C} |\, |p(z)| \leq \rho^d\}.$$

Remarque 3.1 Selon le corollaire 2.11, on a $\mathrm{Cap}(L_{p,\rho}) = \mathrm{Cap}\big(\overline{B}(0, \rho^d)\big)^{1/d}$, qui est de plus égale à ρ en vertu du corollaire 2.1 et du théorème 2.3.

L'objet du théorème de Fekete-Szegö est de chercher un nombre infini d'entiers algébriques totalement dans un ensemble. Des lemniscates de Hilbert fournissent des exemples de tels ensembles :

Proposition 3.1 Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire. La lemniscate $L_{P,1} = \{z \in \mathbb{C} \mid |P(z)| \leqslant 1\}$ contient un nombre infini d'entiers algébriques qui y sont totalement dedans.

Démonstration. On pose $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{z \in \mathbb{C} \mid P(z)^n = 1\}$. L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} S & \to & \mathbb{U} \\ z & \mapsto & P(z) \end{array} \right.$ est bien définie, surjective car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. Donc S est de cardinal infini. De plus, les éléments de S sont les entiers algébriques totalement dans S (car annulés par $P^n - 1 \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire, pour un certain n). On conclut en remarquant que $S \subset L_{P,1}$.

□

L'étape principale de la démonstration est le théorème suivant, qui affirme que sous certaines hypothèses, on peut toujours trouver une lemniscate de Hilbert dans tout voisinage du compact.

Théorème 3.2 (Lemniscate de Hilbert). Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact avec $\mathrm{Cap}(K) > 0$ et soit $U \supset K$ un voisinage ouvert de K tel que $\mathbb{C} \backslash U$ soit connexe. Alors il existe un polynôme $p \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré $d > 0$ et une constante $\rho > \mathrm{Cap}(K)$ tels que

$$K \subset L_{p,\rho} \subset U.$$

Démonstration. La preuve s'appuie sur le théorème 2.10 (constante de Tchebychev) et le théorème 2.5 (Frostman).

Quitte à restreindre U, on peut supposer que U est borné. Soit $R > 0$ tel que

$$K \subset U \subset B(0, R)$$

Par le théorème de Frostman, $U^{\mu_K}(z) < V_K$ pour tout $z \in \overline{B}(0,R)\backslash U$. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall z \in \overline{B}(0,R)\backslash U,\ U^{\mu_K}(z) \leqslant V_K - \varepsilon$$

La majoration est uniforme car $\overline{B}(0,R)\backslash U$ est compact.

Selon le dernier point du théorème 2.10, $\log \frac{1}{F_n^{\frac{1}{n}}}$ converge uniformément vers U^{μ_K} : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\forall z \in \overline{B}(0,R)\backslash U,\ \left|\log \frac{1}{|F_n(z)|^{\frac{1}{n}}} - U^{\mu_K}(z)\right| < \varepsilon/2$$

ce qui implique

$$\forall z \in \overline{B}(0,R)\backslash U, \log \frac{1}{|F_n(z)|^{\frac{1}{n}}} < V_K - \varepsilon/2$$

ou encore

$$\forall z \in \overline{B}(0,R)\backslash U,\ |F_n(z)|^{\frac{1}{n}} > e^{-V_K+\varepsilon/2} = \mathrm{Cap}(K)e^{\varepsilon/2}$$

Or $z \mapsto \frac{1}{F_n(z)}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash U$, donc selon le principe du maximum, l'inégalité précédente est vraie pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash U$. Posons $\rho := \mathrm{Cap}(K)e^{\varepsilon/2}$, on a ainsi $L_{F_n,\rho} \subset U$ pour tout $n \geqslant n_0$. D'autre part, selon le théorème 2.10, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$,

$$||F_n||_K^{\frac{1}{n}} < \mathrm{Cap}(K)e^{\varepsilon/2} = \rho$$

En posant $d = \max(n_0, n_1)$, on a $K \subset L_{F_d,\rho} \subset U$.

□

Démontrons maintenant le théorème de Fekete-Szegö :

Théorème 3.3 (Fekete-Szegö). Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact symétrique par rapport à la conjugaison complexe et tel que $\mathrm{Cap}(K) \geq 1$. Si U est un ouvert contenant K tel que $C\backslash U$ soit connexe, alors U contient un nombre infini d'entiers algébriques totalement dans U.

Démonstration. L'idée est de trouver un ensemble connu contenu dans U et contenant un nombre infini d'entiers algébriques qui y sont totalement dedans. Selon la proposition 3.1, on peut chercher cet ensemble comme une lemniscate d'un polynôme unitaire à coefficients entiers. Le théorème 3.2 nous fournit une lemniscate $L_{p,\rho}$ dans U, mais pour un polynôme P à coefficients complexes (et $\rho > 1$). Il reste donc à ramener ses coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Quitte à considérer $U \cup U^\star$ (avec $U^\star$ l'ensemble des conjugués de U), on peut supposer que U est symétrique par rapport à l'axe réel. Sous cette condition, si on a

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash U,\ |p(z)| > \rho^d > 1,$$

alors

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash U,\ |p(z)\,\overline{p}(z)| > \rho^{2d} > 1,$$

Ainsi $L_{p\,\overline{p},\rho} \subset U$ et $p\,\overline{p} \in \mathbb{R}[X]$. On continue à noter p ce polynôme à coefficients réels.

Ensuite, supposons que $U \subset \overline{B}(0,R)$, quitte à restreindre l'ouvert U. On a

$$\forall z \in \overline{B}(0,R)\backslash U,\ \left|\frac{1}{p(z)}\right| < \rho^{-d}.$$

Par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et la continuité des racines, du fait que $|z| \leqslant R$, on peut choisir un polynôme $q \in \mathbb{Q}[X]$ qui a toujours ses racines dans U et tel que

$$\forall z \in \overline{B}(0,R)\backslash U,\ \left|\frac{1}{q(z)}\right| < \rho^{-d}.$$

Et comme $\frac{1}{q}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash U$, par le principe du maximum, on a

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash U,\ \left|\frac{1}{q(z)}\right| < \rho^{-d},$$

ce qui implique que $L_{q,\rho} \subset U$.

Il reste à ramener les coefficients de q dans $\mathbb{Z}$, ce qui fait l'objet des deux lemmes suivants (3.1, 3.2). □

Lemme 3.1 Soit $p \in \mathbb{Q}[X]$ de degré $d \geq 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$p(X) = X^d + \frac{1}{n}\gamma(x), \quad \gamma(X) \in \mathbb{Z}[X].$$

Soit $\mu \in \mathbb{N}^*$ et posons $\sigma = \mu\,d$ et $\nu = \sigma!\,n^\sigma$. Alors il existe un polynôme unitaire $\Gamma(X) \in \mathbb{Z}[X]$ de degré $\nu\,d = \deg(p^\nu)$ tel que $r(X) := p^\nu(X) - \Gamma(X)$ est un polynôme de la forme

$$r(X) = \sum_{l=0}^{\nu-\mu-1} p^l(X) q_l(X)$$

où les $(q_l)_{0\leq l\leq \nu-\mu-1}$ sont des polynômes de degré au plus $d-1$ à coefficients dans $\mathbb{Q} \cap [0,1[$.

Démonstration. Considérons la décomposition

$$p^\nu(X) = E(X) + R(X)$$

où

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\sigma} \binom{\nu}{i} \frac{1}{n^i} X^{(\nu-i)d} \gamma^i(X) \quad \text{(unitaire)}$$

$$R(X) = \sum_{i=\sigma+1}^{\nu} \binom{\nu}{i} \frac{1}{n^i} X^{(\nu-i)d} \gamma^i(X).$$

Examinons les coefficients de $E(X)$: pour $0 \leq i \leq \sigma$, comme $i!\,n^i$ divise $\sigma!\,n^\sigma = \nu$, alors $\binom{\nu}{i}\frac{1}{n^i} \in \mathbb{Z}$. Ainsi $E(X) \in \mathbb{Z}[X]$.

Regardons ensuite $R(X)$: pour $i \geq \sigma + 1$, on a $\deg(X^{(\nu-i)d}\gamma^i(X)) \leq (\nu-i)d + i(d-1) \leq \nu d - \sigma - 1 = (\nu-\mu)d - 1$, donc $\deg(R) \leq (\nu-\mu)d - 1$.

Comme $\{p^l(X)X^k \mid 0 \leq l \leq \nu - \mu - 1, 0 \leq k \leq d-1\}$ forme une base de $\mathbb{Q}_{d(\nu-\mu)-1}[X]$, $R(X)$ est alors une $\mathbb{Q}$-combinaison linéaire de cette base. De plus, $p^l(X)X^k$ sont des polynômes unitaires deux à deux de degrés différents, donc on peut trouver récursivement $c_{l,k} \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$ dans l'ordre $k = d-1, \ldots, 0$ et $l = \nu - \mu - 1, \ldots, 0$, de sorte que

$$p^\nu(X) - \sum^{l,k} c_{l,k} p^l(X) X^k \in \mathbb{Z}[X].$$

Posons enfin

$$q_l = \sum_{k=0}^{d-1} c_{l,k} X^k$$

$$r(X) = \sum_{l=0}^{\nu-\mu-1} p^l(X) q_l(X).$$

Alors $\Gamma(X) := p^\nu(X) - r(X) \in \mathbb{Z}[X]$ est le polynôme unitaire cherché.

□

Lemme 3.2 Soit L une lemniscate de polynôme $p \in \mathbb{Q}[X]$ de degré $d \geq 1$ et constante $\rho > 1$, alors il existe une lemniscate de polynôme $\Gamma \in \mathbb{Z}[X]$ et constante 1 contenu dans L.

Démonstration. Il est clair que $\partial L = \{z \in \mathbb{C} \mid |p(z)| = \rho^d\}$. Posons $M = \sup_{z \in \partial L}(1 + |z| + \cdots + |z|^{d-1})$. Soit $\mu \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{M}{\rho^{\mu d}(\rho^d - 1)} \leq 1/2$ et $\frac{\rho^{\mu d}}{2} > 1$. Soit Γ le polynôme dans le lemme précédent pour ce choix de μ et reprenons les notations du lemme précédent.

Pour tout $z \in \partial L$, on a

$$\frac{|p^\nu(z) - \Gamma(z)|}{|p^\nu(z)|} = \frac{|r(z)|}{\rho^{\nu d}} = \frac{\left|\sum_{l=0}^{\nu-\mu-1} p^l(z) q_l(z)\right|}{\rho^{\nu d}} \leqslant \frac{M}{\rho^{\nu d}} \sum_{l=0}^{\nu-\mu-1} \rho^{ld} \leqslant \frac{M(\rho^{(\nu-\mu)d} - 1)}{\rho^{\nu d}(\rho^d - 1)} \leq \frac{M}{\rho^{\mu d}(\rho^d - 1)} \leq \frac{1}{2}.$$

Il résulte alors du théorème de Rouché que $\Gamma^{-1}(0) \subset L$. D'autre part, cette inégalité implique que pour tout $z \in \partial L$

$$|\Gamma(z)| \geq |p^\nu(z)| - |r(z)| \geq \frac{1}{2}|p^\nu(z)| \geq \frac{\rho^{\mu d}}{2} > 1.$$

Or $\frac{1}{\Gamma}$ est holomorphe sur $\overline{C} \backslash L$ car $\Gamma^{-1}(\{0\}) \subset L$, donc selon le principe du maximum, $|\Gamma(z)| > 1$ pour tout $z \notin L$.

Ainsi $L_{\Gamma,1} \subset L$. □

4
THÉORÈME DE ROBINSON

Nous allons dans cette partie énoncer et démontrer le théorème central de ce mémoire, à savoir le théorème de Robinson. On considère un segment K de $\mathbb{R}$. La deuxième partie (2.9) du mémoire nous permet de calculer sa capacité. Si elle est strictement inférieure à 1, on sait par le théorème de Fekete 3.1 que le nombre d'entiers algébriques totalement dans K est fini. Au contraire, lorsque la capacité est plus grande que 1, le théorème de Fekete-Szegö 3.3 donne qu'il y a une infinité d'entiers algébriques arbitrairement proches de K au sens de $\mathbb{C}$. Cependant lorsque K est un segment de $\mathbb{R}$, cette propriété ne suffit pas pour montrer qu'il y a un nombre infini d'entiers algébriques totalement dans K. Ainsi les outils issus de la théorie du potentiel seuls ne permettent pas de rendre bien compte de la situation pour les compacts de $\mathbb{R}$. Pour démontrer une version analogue et plus forte de Fekete-Szegö qui soit adaptée aux compacts de $\mathbb{R}$, nous aurons besoin d'utiliser des notions sur les courbes algébriques.

Dans la section 4.1, nous allons d'abord définir quelques notions sur les courbes algébriques : fonctions régulières/rationnelles sur une courbe, groupe des diviseurs... Puis nous construirons une compactification lisse d'une courbe hyperelliptique, dont nous donnerons une visualisation dans la section 4.1.7. Enfin, la section 4.2 est consacrée à la démonstration du théorème de Robinson. Comme nous allons le voir, on utilise de manière astucieuse des courbes hyperelliptiques pour démontrer un théorème dont l'énoncé n'a *a priori* aucun lien avec elles.

Nous utiliserons dans ce qui suit des notions de cartes locales, formes holomorphes et formes méromorphes sur une surface de Riemann. Le lecteur en trouvera une présentation dans [9], en particulier aux sections I.1 et B.2.

4.1 Quelques notions sur les courbes algébriques

Une *courbe algébrique* est un objet de dimension 1 localement défini par une équation *algébrique*, *i.e.* polynomiale. Comme tous les polynômes sont des fonctions analytiques, l'aspect algébrique nous apporte moins d'informations par rapport à l'aspect analytique, même si on en obtient déjà beaucoup lorsque l'on se concentre uniquement sur son aspect algébrique. De plus, quand on étudie une courbe algébrique sur $\mathbb{C}$, on peut parfois prendre le point de vue de la géométrie analytique complexe qui peut s'avérer pertinent. Pour cette raison, nous allons, par souci de simplicité, démontrer certaines propositions sous l'angle de la géométrie analytique complexe à l'aide des fonctions holomorphes, méromorphes, *etc.*, au lieu de chercher une description algébrique qui serait moins intuitive.

On supposera toujours que le corps $\mathbb{K}$ est $\mathbb{C}$, mais on utilisera $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{C}$ selon l'aspect algébrique ou analytique. Plusieurs définitions, constructions et résultats où on désignera le corps par $\mathbb{K}$ peuvent se généraliser, mais nous ne nous y intéressons pas ici.

On donne un exemple visuel à la fin de la section 4.1.7, qui peut être utile pour comprendre les paragraphes qui le précèdent.

4.1.1 • Courbe algébrique : cas affine

Définition 4.1 Soit $F \in \mathbb{K}[X,Y]$ un polynôme à deux variables qui est non constant et *irréductible*, c'est-à-dire qui ne peut pas s'écrire comme produit de deux polynômes non constants dans $\mathbb{K}[X,Y]$. Une *courbe algébrique* C sur l'espace affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ (ayant le même ensemble sous-jacent que $\mathbb{K}^2$) est l'ensemble des points $(x,y) \in K^2$ satisfaisant l'équation $F(x,y) = 0$. On la représentera comme

$$C : F(x,y) = 0.$$

• **Aspect algébrique** :

L'anneau des fonctions régulières de la courbe C est par définition l'anneau

$$A(C) := \mathbb{K}[X,Y]/(F).$$

Autrement dit, il s'agit l'anneau de polynômes *modulo une relation d'équivalence*, où deux polynômes sont équivalents si et seulement si ils prennent toujours la même valeur sur les points de la courbe C. $A(C)$ est un anneau *intègre* car F est *irréductible* ; son corps de fraction s'appelle *le corps des fonctions rationnelles* de la courbe et est noté $\mathscr{R}(C)$.

• **Aspect analytique** (plus intuitif) :

Il résulte du théorème des fonctions implicites que, si $\nabla F = (\partial_x F, \partial_y F) \neq \mathbf{0}$ en un point $(x_0,y_0) \in C(\mathbb{C})$, alors dans un voisinage de (x_0,y_0), la courbe admet une paramétrisation holomorphe par x ou y, c'est-à-dire que la courbe est localement le graphe d'une fonction holomorphe $y = y(x)$ ou $x = x(y)$. La courbe se comporte bien au voisinage d'un tel point (x_0,y_0) : on dit que (x_0,y_0) est un *point lisse*. Plus précisément, la courbe admet une structure de variété complexe de dimension 1 au voisinage de (x_0,y_0). C'est pour cette raison de dimension qu'on l'appelle une courbe. Au cas contraire, un point de C où $\nabla F = \mathbf{0}$ s'appelle un *point singulier*. Une courbe sans point singulier est dite *lisse*. Une courbe lisse admet donc une structure naturelle de surface de Riemann.

On va considérer des courbes hyperelliptiques (affines), dont la définition donnée ici sera un peu plus restreinte par rapport au cas général qui ne nous intéresse pas ici.

Définition 4.2 Une *courbe hyperelliptique* est une courbe algébrique

$$C : y^2 = D(x)$$

où $D \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme *unitaire* en X de degré $2g+2$ ($g \geq 0$) dont les racines sont *distinctes*. On dit que C est une courbe hyperelliptique *réelle* si de plus $D \in \mathbb{R}[X]$.

Par cette définition, on vérifie bien qu'une courbe hyperelliptique est *lisse*.

4.1.2 • Diviseurs

Soit $F(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ non constant et irréductible. Considérons la courbe algébrique complexe associée à C. Le *groupe de diviseurs* sur C, qu'on notera $\mathrm{div}(C)$, est le groupe abélien libre engendré par la base $\{P\}_{P \in C}$. Plus précisément, un *diviseur* D sur C est une combination linéaire formelle à coefficients entiers d'un nombre fini de points $P \in C$:

$$D = \sum_{i=1}^{n} n_i P_i, \quad \text{où } n \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{Z}, P_i \in C.$$

Des points différents sont considérés linéairement indépendants. Le groupe de diviseurs $\mathrm{div}(C)$ désigne alors l'ensemble des diviseurs sur C muni d'une structure de groupe avec l'addition sur les coefficients terme à terme

(point par point). On dispose d'un morphisme de groupes naturel, appelé *degré d'un diviseur* :

$$\deg : \ \mathrm{div}(C) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad \sum n_i P_i \longmapsto \sum n_i.$$

Supposons que la courbe C soit *lisse*. Alors selon le théorème des fonctions implicites, C possède une structure de variété complexe de dimension 1. Soit $f \in \mathscr{R}(C)^\times$. f peut se voir comme une fonction *méromorphe* sur C et par suite, $\mathrm{ord}_P(f)$ est bien défini pour tout $P \in C$ comme l'ordre de la fonction méromorphe f en P. On définit le *diviseur principal* associé à $f \in \mathscr{R}(C)$ comme

$$\mathrm{div}(f) := \sum \mathrm{ord}_P(f) P.$$

On a $\mathrm{div}(f) \in \mathrm{div}(C)$ puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de coefficients non nuls. On vérifie bien que l'on vient de définir un morphisme de groupes

$$\mathrm{div} : \left(\mathscr{R}(C)^\times, \cdot\right) \longrightarrow \left(\mathrm{div}(C), +\right).$$

On définit la *jacobienne* $J(C)$ *associée à la courbe (lisse)* C comme le conoyau du morphisme ci-dessus, i.e.

$$J(C) := \mathrm{div}(C) / \mathrm{div}\, \mathscr{R}(C)^\times.$$

On dit que deux diviseurs D_1 et D_2 sont *linéairement équivalents* si $D_1 - D_2$ est un diviseur principal, autrement dit, si $D_1 = D_2$ dans $J(C)$.

Remarquons que l'hypothèse de lissité a été nécessaire pour définir les notions ci-dessus. C'est pourquoi on voudra chercher une compactification *lisse* de la courbe hyperelliptique plus tard.

4.1.3 • Une compactification naïve

Quand on parle de la compacité d'une courbe, on parle de l'ensemble sous-jacent de la courbe muni de la topologie induite de $\mathbb{C}^2$. Une courbe compacte possède certaines bonnes propriétés qui nous motivent à compactifier les courbes. De plus, on souhaite que la courbe compactifiée soit *lisse* pour avoir une structure de surface de Riemann.

La courbe hyperelliptique $y^2 = D(x)$ n'est pas compacte : en effet, intuitivement, il y a un (des) point(s) à l'infini qui n'est (ne sont) pas sur la courbe affine. Une première approche possible est d'utiliser le plan projectif $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$, qui compactifie le plan affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}^2$ en ajoutant une ligne projective à l'infini. La compactification induite sur la courbe est alors la fermeture de C dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$. Plus précisément, les étapes cette compactification sont :

— Écrire l'équation de la courbe sous forme homogène $z^{2g} y^2 = z^{2g+2} D(x/z)$;

— Définir la compactification comme la courbe algébrique définie sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ par cette équation.

On ne détaillera pas cette approche. Toutefois, nous affirmons ici que cette courbe compactifié *n'est pas* lisse au point $\infty = [0 : 1 : 0] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ lorsque $g > 0$. On a donc besoin d'une autre compactification.

4.1.4 • Interlude : recollement de deux courbes algébriques affines

Avant de construire une compactification lisse, nous allons introduire une construction de recollement de deux courbes algébriques affines

$$C_1 : F(x, y) = 0, \quad C_2 : G(u, v) = 0$$

respectivement sur l'espace affine $\mathbb{K}^2_{x,y}$ et $\mathbb{K}^2_{u,v}$ (avec coordonnées x, y ou u, v).

Définition 4.3 Soit $C : F(x, y) = 0$ une courbe algébrique affine. Un *fermé algébrique* de C est l'ensemble des zéros *sur* C d'un nombre fini de polynômes $H_i \in \mathbb{K}[X, Y]$ pour $i \in I$ où I est un ensemble fini. On le note $Z_C(H_i, i \in I)$, ou simplement $Z(H_i, i \in I)$ si aucune confusion n'existe.

Définition 4.4 Soit C_1 (*resp.* C_2) une courbe algébrique sur $\mathbb{K}^2_{x,y}$ (*resp.* $\mathbb{K}^2_{u,v}$). Une application $\varphi : C_1 \to C_2$ est appelé un *morphisme rationnel* si $\varphi = (u(x,y), v(x,y))$ avec $u, v \in \mathscr{R}(C_1)$.

Autrement dit, φ est rationnel si l'on peut l'écrire sous la forme $u(x,y) = H_{11}/H_{12}, v(x,y) = H_{21}/H_{22}$ où $H_{ij} \in \mathbb{K}[X,Y]$ et H_{12}, H_{22} non identiquement nuls sur C_1. Remarquons qu'un tel φ est «à valeurs bien définies» (en termes de l'application sous-jacente) sur $C_1 \backslash Z(H_{12}, H_{22})$.

Définition 4.5 Une *donnée de recollement* entre surfaces de Riemann C_1 et C_2 consiste en :

(i) deux fermés algébriques Σ_1 et Σ_2 repectivement de C_1 et C_2 ;

(ii) une paire de morphismes rationnels

$$C_1 \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} C_2$$

qui induisent un isomorphisme à valeurs bien définies

$$\varphi : \ C_1 \backslash \Sigma_1 \overset{\sim}{\underset{}{\rightleftarrows}} C_2 \backslash \Sigma_2 \ : \psi$$

Avec une telle donnée de recollement, on peut obtenir une *courbe algébrique* C' en prenant l'union disjointe $C_1 \dot\cup C_2$ et en identifiant les points de $C_1 \backslash \Sigma_1$ et de $C_2 \backslash \Sigma_2$ par φ et ψ. Quand on traite un point venant de C_i, on pourra regarder son voisinage dans C' que nous pouvons identifier à C_i. Cette courbe n'est pas nécessairement une courbe affine.

Les notions de corps des fonctions rationnelles, de lissité, des diviseurs et diviseurs principaux, *etc.* se généralisent au cas d'une telle courbe recollée, en réunissant leurs définitions sur C_1 et C_2. Par exemple, f est une fonction rationnelle sur C' si $f|_{C_1}$ et $f|_{C_2}$ sont toutes fonctions rationnelles, respectivement sur C_1 et C_2. Nous ne rentrons pas dans les détails ici.

4.1.5 • Compactification lisse

Soit $D \in \mathbb{K}[x]$ un polynôme unitaire de degré $2g+2$ dont les racines sont distinctes. On a une courbe hyperelliptique affine

$$C : y^2 = D(x).$$

Sa compactification, que l'on note pour l'instant $\widetilde{C}$, s'obtient en ajoutant deux points à l'infini ∞_+ et ∞_-. C'est la courbe qu'on étudiera dans les paragraphes suivants.

On peut construire cette compactification de la manière suivante : $\widetilde{C} = U_0 \cup U_\infty$, où

$$U_0 : y^2 = D(x), \quad U_\infty : v^2 = u^{2g+2} D(1/u),$$

le recollement entre ces courbes affines étant donné par

$$\begin{aligned} U_0 \quad &\overset{}{\rightleftarrows} \quad U_\infty \\ U_0 \backslash \{x=0\} \ &\overset{\sim}{\rightleftarrows} \ U_\infty \backslash \{u=0\} \\ (x,y) &\longmapsto (1/x, y/x^{g+1}) \\ (1/u, v/u^{g+1}) &\longmapsfrom (u,v). \end{aligned} \tag{2}$$

Les points $\infty\pm$ correspondent à $(0, \pm 1)$ sur U_∞, *i.e.* sur la courbe $v^2 = u^{2g+2} D(1/u)$. En se restreignant à U_0 ou U_∞, on vérifie immédiatement que la courbe $\widetilde{C}$ ainsi obtenue est lisse ; elle est muni d'une structure naturelle de variété complexe. De plus, on a

Proposition 4.1 $\widetilde{C}$ est une surface de Riemann compacte de genre égal à g. □

Une fois qu'on a obtenu la compactification $\widetilde{C}$, on continue à la noter C sans risque de confusion.

Proposition 4.2 Sur une courbe hyperelliptique compactifiée (lisse), tous les diviseurs principaux sont de degré zéro. Autrement dit, on a $(\deg \circ \operatorname{div})\mathscr{R}(C)^\times = 0$.

Démonstration. Par le théorème des résidus sur une surface de Riemann compacte ([9], Prop. B.2.2), la somme des résidus d'une forme méromorphe est nulle. Soit f une fonction rationnelle, en appliquant ce résultat à la forme $\mathrm{d}f/f$, avec le principe de l'argument, on obtient que f a autant de zéros que de pôles comptés avec multiplicité. □

La courbe compactifiée est munie d'une involution ι induite par l'application $(x, y) \mapsto (x, -y)$ sur l'espace affine et qui échange ∞_+ et ∞_-. On appelle ι la *conjugaison* de cette courbe hyperelliptique. Cette conjugaison induit canoniquement une involution sur le groupe de diviseurs sur la courbe : $\sum n_i P_i \mapsto \sum n_i \iota(P_i)$.

Exemple 4.1 (Calcul d'un diviseur principal sur C). Si on note $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2g+2}$ les racines de $D(x)$ (qui sont distinctes par hypothèse) et $P_i \in C$ leurs points correspondants, alors

$$\operatorname{div}(1/y^2) = -2 \sum_{i=1}^{2g+2} P_i + (2g+2)\,(\infty_+ + \infty_-)\,. \tag{3}$$

On vérifie bien que son degré est zéro.

Démonstration. Définissons d'abord la fonction $1/y^2$: on la définit comme $1/y^2$ sur U_0 et u^{2g+2}/v^2 sur U_∞ ; on vérifie qu'elles coïncident sur $U_0 \cap U_\infty$ en effectuant le changement de variables (2), donc cette fonction rationnelle est bien définie.

Ensuite, pour simplifier, on considérera le cas $g = 1, D(x) = x(x^3 - 1)$ et calculera la multiplicité d'un point de vue plutôt analytique complexe (c'est-à-dire, avec des cartes locales, etc.). L'équation de la courbe sur U_∞ devient alors $v^2 = 1 - u^3$.

Calculons sa multiplicité en $\infty\pm$. On se restreint à U_∞. Alors $\infty_+ = (0, 1)$, et dans un voisinage de ∞_+, on peut prendre la carte locale (V_1 étant un certain voisinage de 0)

$$\varphi_1 : \mathbb{C} \supset V_1 \longrightarrow C, \quad z \longmapsto (u, v) = (z, \sqrt{1 - z^3}).$$

On a sur cette carte $\varphi_1(0) = \infty_+$ et

$$1/y^2 = u^4/v^2 = z^4/(1 - z^3),$$

donc

$$\operatorname{ord}_{\infty_+}(1/y^2) = 4 = 2g + 2.$$

De même, on a

$$\operatorname{ord}_{\infty_-}(1/y^2) = 4 = 2g + 2.$$

Calculons par exemple la multiplicité de $1/y^2$ en $P_1 = (x, y) = (0, 0) \in U_0$. Précédemment u servait comme paramètre (holomorphe) local de C en $\infty_\pm$. *Maintenant c'est la variable y qui servira comme paramètre local de C en P_1.* Donc

$$\operatorname{ord}_{P_1}(1/y^2) = -2.$$

Plus précisément, comme $D(x) = x(x^3 - 1)$ a un zéro simple en $x = 0$, l'application holomorphe $\psi : x \mapsto w = x(x^3 - 1)$ est biholomorphe localement en $x = 0$ et $w = 0$, autrement dit, sur des voisinages suffisamment petits de $x = 0$ et $w = 0$, ψ admet une inverse holomorphe qu'on note $\psi^{-1}(w)$. Ainsi, en prenant la carte locale de $(0, 0) \in U_0$ (V_2 étant un certain voisinage de 0) :

$$\varphi_2 : \mathbb{C} \supset V_2 \longrightarrow C, \quad z \longmapsto (x, y) = (\psi^{-1}(z^2), z),$$

on a

$$1/y^2 = 1/z^2,$$

donc

$$\mathrm{ord}_{P_1}(1/y^2) = -2.$$

Il en est de même pour tous les $P_i = (\alpha_i, 0) \in U_0$ où α_i est une racine de $D(x)$. Notons que $1/y^2$ n'a pas d'autres zéros ni d'autres pôles, d'où la formule (3). □

Exemple 4.2 Soit $A \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme unitaire ; on lui associe la forme différentielle $\eta_A = \frac{A(x)\,\mathrm{d}x}{y}$. Si $\deg A = g$, alors η_A a un pôle simple en ∞_+ et ∞_-, avec résidus -1 et $+1$ respectivement ; si $\deg A < g$, alors η_A est une forme holomorphe.

Démonstration. Il suffit de calculer dans les deux cartes locales comme dans l'exemple précédent. □

4.1.6 • Courbes hyperelliptiques et équation de Pell-Abel

Nous démontrons ici un résultat important pour la suite : la caractérisation en termes de courbes hyperelliptiques de l'existence de solutions à une équation de Pell-Abel.

Définition 4.6 Soit $D \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire de degré $2g + 2$ avec racines distinctes. On appelle *équation de Pell-Abel* l'équation d'inconnue $(P, Q) \in \mathbb{K}[x]^2$ de la forme :

$$P^2 - DQ^2 = c, \text{ avec } c \in \mathbb{K}^*.$$

Le degré d'une solution (P, Q) est, par définition, le degré de P.

Théorème 4.1 Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. L'équation de Pell-Abel admet une solution de degré r dans $\mathbb{K}[x]$.
2. Le diviseur $r((\infty_-) - (\infty_+))$ sur la courbe C (cf. section 4.1.5) est linéairement équivalent à 0.

Démonstration. Soit C la courbe définie par $y^2 = D(x)$. Son anneau des fonctions régulières est un $\mathbb{K}[x]$-module de base $\{1, y\}$, avec $y^2 = D(x)$.

Supposons qu'il existe $P, Q \in \mathbb{K}[x]$,$c \in \mathbb{K}^*$ tels que $P^2 - DQ^2 = c$. On pose $\varphi_+ = P + yQ$, $\varphi_- = P - yQ$. Comme φ_+ et φ_- sont des fonctions régulières sur la courbe hyperelliptique affine, leurs pôles sont supportés par $\{\infty_+, \infty_-\}$. Or $\varphi_+\varphi_- = P^2 - DQ^2 = c$, donc leurs zéros sont également supportés par $\{\infty_+, \infty_-\}$. Ainsi $\mathrm{div}(\varphi_+) = a(\infty_-) + b(\infty_+)$. Or $\deg(\mathrm{div}(\varphi_+)) = 0$, donc $b = -a$ et le degré de P donne que $a = r$. Ainsi $r((\infty_-) - (\infty_+))$ est principal (donc linéairement équivalent à 0).

Réciproquement, supposons que $r((\infty_-) - (\infty_+))$ est linéairement équivalent à 0. Soit ψ une fonction

rationnelle telle que $\mathrm{div}(\psi) = r((\infty_-) - (\infty_+))$. Comme ψ n'a pas de pôle sur l'espace affine, ψ est régulier. Donc ψ s'écrit $\psi = P + yQ$ avec $P, Q \in \mathbb{K}[x]$, avec $\deg P = r$. Son conjugué est $\overline{\psi} = P - yQ$. Or la conjugaison est involutive et échange ∞_+ et ∞_-, donc $\mathrm{div}(\overline{\psi}) = (-r)((\infty_-) - (\infty_+))$ et donc $\mathrm{div}(\psi\overline{\psi}) = 0$. Ainsi $P^2 - DQ^2 = \psi\overline{\psi}$ est une constante non nulle de $\mathbb{K}$. □

4.1.7 • Un exemple visuel

Introduisons la courbe hyperelliptique que nous allons étudier dans la preuve du théorème de Robinson. Soient

$$a_0 < b_0 < a_1 < \cdots < a_g < b_g$$

des réels distincts et posons $E_j = [a_j, b_j]$ et $E = \bigcup_{j=0}^{g} E_j$. On considère le polynôme

$$D = \prod_{j=0}^{g} (X - a_j)(X - b_j)$$

et on note C la courbe hyperelliptique compactifiée associée (cf. section 4.1.5).

Donnons une illustration visuelle de cette courbe dans le cas $g = 2$.

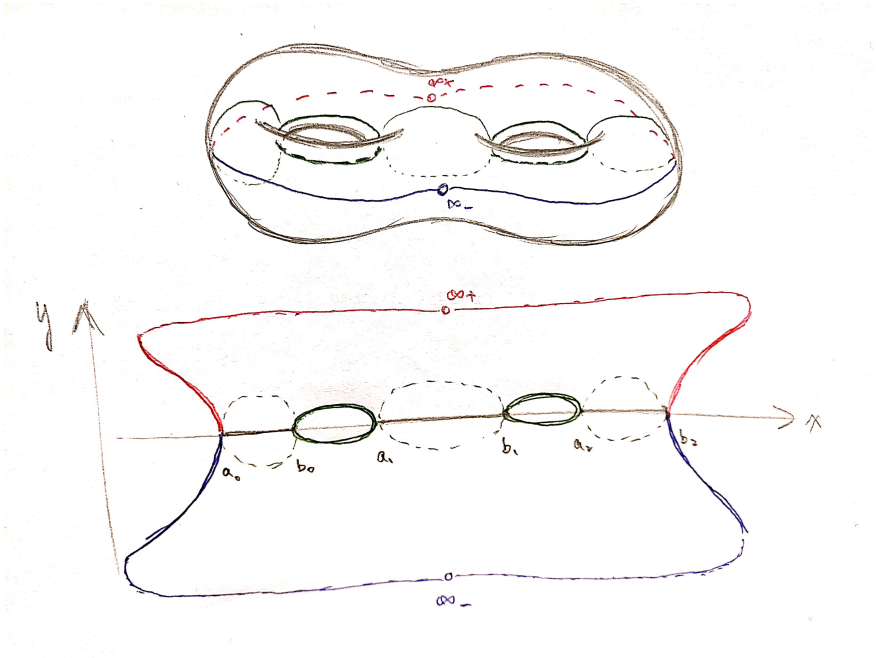


Figure 8 – Cas $g = 2$: C comme une surface de Riemann (en haut) ou une courbe sur le plan affine (en bas)

.

La figure 8 montre la correspondance entre les deux représentations de la courbe C. La figure en bas sur le plan affine (les traits pleins représentent les points réels) s'obtient en intersectant la surface en haut par un plan horizontal (et en ôtant les points « à l'infini » $\infty\pm$). On voit clairement la position de $\infty\pm$, les deux points à l'infini ajoutés à la courbe hyperelliptique affine. Alors, on comprend aussi la singularité de la compactification naïve (cf. section 4.1.3) : elle se retrouve juste en collant les deux points $\infty\pm$ dans la figure en haut !

Notons α_j le cycle sur la courbe qui revêt l'intervalle $[b_{j-1}, a_j]$. Il existe alors un cycle β_j traversant le j-ième «trou» de la surface, qui n'intersecte que le cycle α_j et de plus avec multiplicité 1. On dit alors que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g\}$ forme une *base symplectique de l'homologie singulière* $H_1(C, \mathbb{Z})$. Cette base est illustrée, quand $g = 2$, dans la Figure 9.

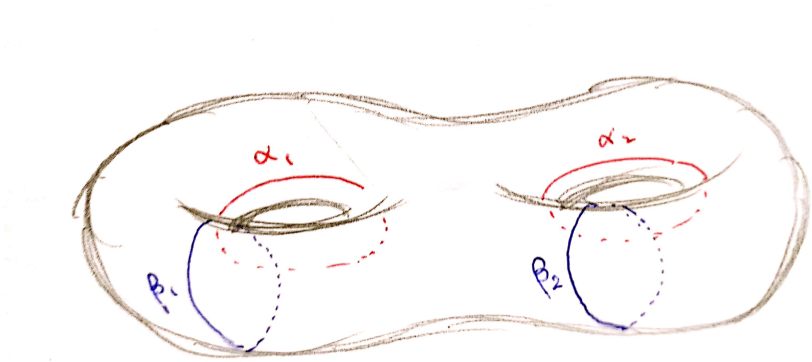


Figure 9 – Cas $g = 2$: une base symplectique de $H_1(C; \mathbb{Z})$

.

Le genre g qui correspond intuitivement au nombre de trous de la surface, correspond également à la dimension de l'espace des formes holomorphes.

Proposition 4.3 L'espace des 1-formes holomorphes sur une surface de Riemann de genre g a pour dimension complexe g.

L'intégrale d'une forme holomorphe sur un cycle donne un *accouplement parfait*, au sens suivant :

Théorème 4.2 Soit $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g\}$ une base symplectique de $H_1(C, \mathbb{Z})$. Soit $\{\omega_1, \ldots, \omega_g\}$ une base de l'espace des 1-formes holomorphes sur C. Alors la matrice de taille $g \times g$ des coefficients $A_{i,j}$ définis comme suit est inversible :

$$A_{ij} = \int_{\alpha_j} \omega_i.$$

Pour la démonstration de ce théorème, nous renvoyons le lecteur curieux à [9], Théorème III.1.2.

4.2 Démonstration du théorème de Robinson

L'objectif de ce qui suit est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.3 (Robinson). Soit E une réunion finie d'intervalles de $\mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Cap}(E) > 1$, alors il existe une infinité d'entiers algébriques totalement dans E.

Remarque 4.1 Il suffit de démontrer le théorème pour une réunion de segments disjoints, car l'union de deux segments non disjoints forme un segment, et la capacité d'un intevalle ouvert est définie comme la borne supérieure des capacités des segments contenus dans l'intervalle.

Soit $a_0 < b_0 < a_1 < \cdots < a_n < b_n$. Soit $E_j = [a_j, b_j]$ et $E = \bigcup_{j=0}^{g} E_j$.

On pose $D = \prod_{j=0}^{g}(X - a_j)(X - b_j)$. La démonstration du théorème de Robinson repose sur la géométrie de la courbe hyperelliptique $y^2 = D(x)$. On le démontre d'abord dans le cas dit *de Pell-Abel*, puis on généralise le résultat par un argument de densité.

4.2.1 • Cas de Pell-Abel

On suppose que l'équation de Pell-Abel relative au polynôme D admet une solution, *i.e.* qu'il existe $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P^2 - DQ^2 = c$$

où c est un réel non nul. On note $r := \deg(P)$.

Notons d'abord que $c > 0$, en fait $c = P(a_0)^2$ car a_0 est une racine de D. On pose alors $M = \sqrt{c}$ et on écrit l'équation de Pell-Abel sous la forme :

$$P^2 - DQ^2 = M^2.$$

Remarquons les premières propriétés des polynômes P et Q :

Proposition 4.4 Soit $x \in \mathbb{R}$,

1. $|P(x)| \leqslant M \Leftrightarrow x \in E$ ou $Q(x) = 0$.
2. $|P(x)| = M \Leftrightarrow x$ est racine de Q ou l'un des a_i, b_j.

Démonstration. Ces deux propriétés sont immédiates à partir de l'équation de Pell-Abel en observant que $D(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in E$. En effet, D tend vers $+\infty$ en l'infini, et change de signe en chaque a_i, b_j. □

La clé de la démonstration du théorème de Robinon repose sur la propriété suivante des racines des polynômes P et Q, illustrée par la figure 10.

Proposition 4.5 On note r_j le nombre de racines de P dans E_j.

1. Les racines de P et Q sont simples, entrelacées, et appartiennent toutes à $\overset{\circ}{E} = \bigcup_{j=0}^{g}]a_j, b_j[$.
2. Les racines de Q dans E_j divisent E_j en r_j sous-intervalles ; dans chacun d'entre eux, le polynôme P est, soit strictement croissant, soit strictement décroissant, de valeurs extrêmes M et $-M$.

Ces propriétés sont illustrées par la Figure 10 (cas $g = 1$, $r_1 = 4$, $r_2 = 6$). Les p_i sont les racines de P et les q_i sont les racines de Q.

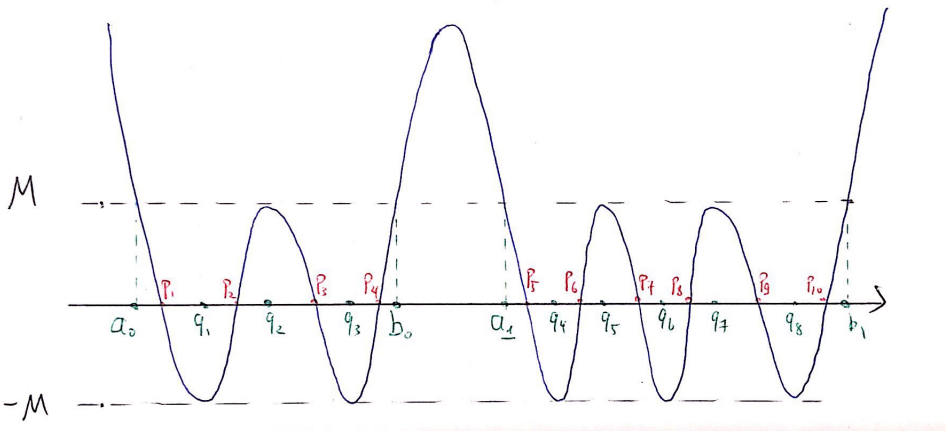


Figure 10 – Allure de P, cas $g = 1$, $r_1 = 4$, $r_2 = 6$

Cette proposition est la clé de la démonstration du théorème de Robinson. En vue de son importance, il est très instructif de la démontrer d'abord dans le cas $g = 0$ (autrement dit, $E = [a, b]$ est un seul segment). Cela permet de montrer les grandes étapes de la démonstration, en séparant les difficultés.

4.2.2 • Démonstration de la proposition 4.5 dans le cas $g = 0$

On se place ici dans le cas où $E = [a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$, donc $g = 0$ et $D(X) = (X - a)(X - b)$. On pose $f = P + yQ$, fonction régulière sur la courbe $y^2 = D(x)$ complétée comme au début du chapitre (elle n'est plus hyperelliptique, mais simplement quadratique). Commençons par le calcul de $\mathrm{d}f/f$:

Proposition 4.6 On a $\mathrm{d}f/f = r\ \mathrm{d}x/y$, où $r = \deg P$.

Démonstration. On sait que $\mathrm{div}(f) = r((\infty_-) - (\infty_+))$ (*cf.* la démonstration du théorème 4.1), donc f a un zéro d'ordre r en ∞_- et un pôle d'ordre r en ∞_+. Ainsi, $\mathrm{d}f/f$ a deux pôles simples en (∞_+), (∞_-) de résidus $-r$ et r. Calculons alors les pôles de la forme $\mathrm{d}x/y$ et leurs ordres. Les seuls pôles éventuels de $\mathrm{d}x/y$ sont soit (∞_+), (∞_-), soit les racines du polynôme D.

- Si α est une racine de D dans l'espace affine, comme les racines de D sont simples, on peut écrire $D(X) = (X - \alpha)H(X)$, avec $H(\alpha) \neq 0$. En différenciant $y^2 = (X - \alpha)H(X)$, on obtient qu'au voisinage de α : $\mathrm{d}x \sim \frac{2y}{H(\alpha)}\ \mathrm{d}y$.

  Donc $\mathrm{d}x/y = \frac{2}{H(\alpha)}\ \mathrm{d}y$ n'a pas de pôle en α.
- En $\infty\pm$, dans les coordonnées $(u = \frac{1}{x}, v = \frac{y}{x})$, $\infty_+ = (0, 1)$, et l'équation de la courbe est $v^2 = u^2 D(\frac{1}{u})$. Donc $\frac{\mathrm{d}x}{y} = -\frac{u}{v}\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\frac{\mathrm{d}u}{\pm\sqrt{u^2 D(\frac{1}{u})}u} \sim \mp\frac{\mathrm{d}u}{u}$ car le coefficient constant de $u^2 D(\frac{1}{u})$ est 1. Ainsi ∞_+ est un pôle simple de $\mathrm{d}x/y$, et de même pour ∞_-.

Par conséquent $\frac{\mathrm{d}f/f}{\mathrm{d}x/y}$ n'a ni zéro ni pôle sur l'espace affine, ni à l'infini : il s'agit donc d'une fonction constante. Or selon le calcul précédent, les résidus de $\mathrm{d}x/y$ en $\infty\pm$ sont ∓ 1, donc cette constante vaut r. □

Démontrons maintenant la proposition 4.5 dans le cas où E est un segment, illustrée par la figure 11 :

Proposition 4.7 1. Les racines de P et Q sont simples, entrelacées, et appartiennent toutes à $\mathring{E}$.

2. Les racines de Q divisent E en r sous-intervalles ; dans chacun d'entre eux, le polynôme P est, soit strictement croissant, soit strictement décroissant, de valeurs extrêmes M et $-M$.

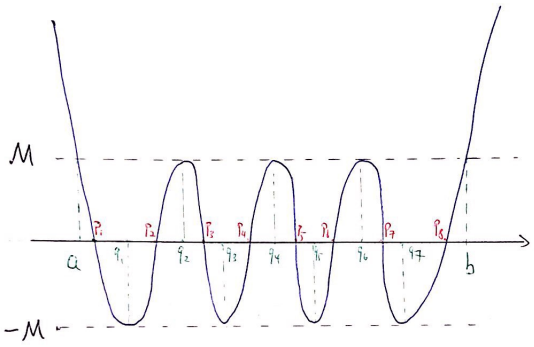


Figure 11 – Allure de P, cas $g = 0$, $r = 8$

Démonstration. Une réalisation de $f = P + yQ$ sur E est $f(x) = P(x) + iy_1(x)Q(x)$, avec $y_1(x) = \sqrt{-D(x)}$ car $D(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in E$. L'équation de Pell-Abel implique que $|f(x)|^2 = P(x)^2 - D(x)Q(x)^2 = M^2$, donc f est de module constant égal à M sur E.

Nous pouvons ainsi écrire, selon le théorème de relèvement angulaire, que $f(x) = Me^{i\theta(x)}$, avec $\theta : E \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Ainsi on a $P(x) = M\cos(\theta(x))$, $y_1(x)Q(x) = M\sin(\theta(x))$. Et comme $f(a) = \pm M$, $f(b) = \pm M$, on a $\theta(a) = c_0\pi$, $\theta(a) = c_1\pi$, où $c_0, c_1 \in \mathbb{Z}$. De plus, on a $\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{f} = i\int_a^b \mathrm{d}\theta = i(c_1 - c_0)\pi$. Or $\frac{\mathrm{d}f}{f} = r\frac{\mathrm{d}x}{y}$, et $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{y} = \pm i\pi$ (le résidu de $\frac{\mathrm{d}x}{y}$ à l'infini est ± 1 et la courbe $y^2 = D(x)$ est un revêtement de degré 2 sur $E = [a, b]$. Le signe $\pm$ est déterminé lorsqu'on choisit une orientation.) On en déduit que $|c_1 - c_0| = r$.

Or selon la proposition 4.6, f' ne s'annule pas sur E, donc θ' ne s'annule pas sur E. Ainsi θ est strictement monotone sur E, allant de $c_0\pi$ à $c_1\pi$, donc $\cos(\theta(x))$ s'annule $|c_1 - c_0| = r$ fois, et $\sin(\theta(x))$ s'annule $|c_1 - c_0| - 1 = r - 1$ fois hors extrémités. Comme $\deg P = r$, $\deg Q = r - 1$, on a ainsi trouvé toutes les racines de P et Q. Le reste des points de la proposition se déduisent immédiatement à partir de la forme sinusoïdale de P et Q. □

Le cas où E est un seul segment permet déjà d'illustrer les étapes principales de la démonstration dans le cas général, en omettant une difficulté importante : quand E est la réunion des segments E_j, on ne sait pas a priori combien de racines de P on doit trouver dans chaque E_j, et comment on peut affirmer que l'on aura trouvé toutes les racines. Pour résoudre cette difficulté dans le cas général, on utilise les *périodes* d'une forme différentielle sur la courbe hyperelliptique de genre $g > 0$.

4.2.3 • Démonstration de la proposition 4.5 pour $g > 0$

On se place dans le cas général : $E = \bigcup_{i=0}^{g} [a_i, b_i]$.

Comme il a été indiqué précédemment, la difficulté est de déterminer combien de racines sont dans $E_j = [a_j, b_j]$ et de vérifier que l'on a ainsi trouvé effectivement toutes les racines de P. Pour cela, nous utilisons les périodes d'une forme différentielle particulière sur la courbe $y^2 = D(x)$, appelée *forme canonique*.

Théorème 4.4 Il existe un unique $R \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré g tel que, pour $j = 1, \dots, g$,

$$\int_{b_{j-1}}^{a_j} \frac{R(x)}{\sqrt{D(x)}}\,\mathrm{d}x = 0.$$

La forme différentielle $\eta = \frac{R(x)\,\mathrm{d}x}{y}$ est appelée *forme canonique de troisième espèce*.

Démonstration. On considère la courbe $y^2 = D(x)$ comme une surface de Riemann grâce au revêtement $(x, y) \mapsto x$. La dimension de l'espace des formes holomorphes est g. Par le biais d'un calcul de résidus dans les coordonnées $(u = \frac{1}{x}, v = \frac{y}{x^{g+1}})$, on montre que pour $i = 0, \dots, g-1$ les $x^i\,\mathrm{d}x/y$, sont des formes holomorphes, donc forment une base des formes holomorphes.

Notons α_j le cycle sur la courbe qui recouvre (quadratiquement) l'intervalle $[b_{j-1}, a_j]$. Un polynôme unitaire de degré g $R(X) = X^g + \sum_{j=0}^{g-1} c_j X^j$ vérifie la condition exigée si et seulement si ses coefficients $c_0, \dots c_{g-1}$ vérifient le système de g équations avec g inconnues :

$$\sum_{i=0}^{g-1} c_i \int_{\alpha_j} \frac{x^i\,\mathrm{d}x}{y} = -\int_{\alpha_j} \frac{x^g\,\mathrm{d}x}{y}, \qquad j = 1, \dots g.$$

Par le théorème 4.2, ce système est de déterminant non nul et admet donc une unique solution. □

Remarque 4.2 Par un calcul dans les coordonnées $(u = 1/x, v = y/x^{g+1})$, on peut montrer que η est une forme méromorphe qui admet deux pôles simples en ∞_+ et ∞_-, de résidus -1 et 1 respectivement.

Remarque 4.3 Les relations $\int_{b_{j-1}}^{a_j} \frac{R(x)}{\sqrt{D(x)}}\,\mathrm{d}x = 0$ imposent que R s'annule au moins une fois dans chaque $[b_{j-1}, a_j]$, pour $j = 1, \dots, g$. Comme R est de degré g, on y trouve alors toutes ses racines. En particulier, R est de signe constant sur les $E_j = [a_j, b_j]$.

Intéressons-nous maintenant aux périodes de η sur les cycles qui recouvrent les segments $[a_j, b_j]$ (c'est un revêtement quadratique, ramifié en a_j, b_j). Ces périodes sont égales à $2\eta_j$, avec $\eta_j = \int_{a_j}^{b_j} \frac{R(x)}{i\sqrt{-D(x)}}\,\mathrm{d}x$.

Proposition 4.8 Notons $\eta_j = \int_{a_j}^{b_j} \frac{R(x)}{i\sqrt{-D(x)}}\,\mathrm{d}x$, pour $j = 0, \dots g$. Il existe $(\epsilon_j)_{0 \le j \le g} \in \{-1, 1\}^{g+1}$ tels que

$$\sum_{j=0}^{g} \epsilon_j \eta_j = i\pi.$$

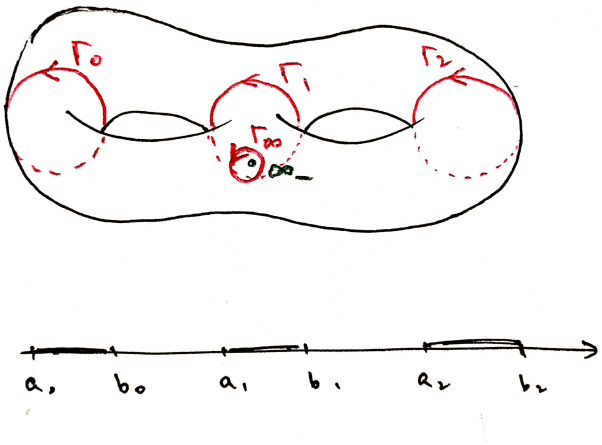


Figure 12 – Cas $g = 2$: $\bigcup_{j=0}^{g} \Gamma_j$ est le bord de l'hémi-surface médiane.

Démonstration. Notons Γ_j les cycles qui recouvrent les segments $[a_j, b_j]$ (cf. Figure 12), les périodes de η sur ces cycles valent $\pm 2\eta_j$. Notons Γ_∞ un cycle autour du point ∞_- (cf. Figure 12). La forme η est holomorphe dans le domaine encadré par $\bigcup \Gamma_j$ et Γ_∞. Donc par le théorème de Cauchy sur la surface de Riemann

$$\sum_{j=0}^{g} \int_{\Gamma_j} \eta = \int_{\Gamma_\infty} \eta = 2i\pi$$

car le résidu de η en ∞_- vaut 1. Ainsi $\sum_{j=0}^{g} \epsilon_j \eta_j = i\pi$, les signes étant déterminés par l'orientation des cycles. □

Comme dans le cas $g = 0$, le calcul de $\mathrm{d}f/f$ nous sera utile dans la suite :

Proposition 4.9 On a $\mathrm{d}f/f = r\eta$, où $r = \deg P$ et η est la forme canonique définie précédemment.

Démonstration. Nous savons que les formes $\mathrm{d}f/f$ et $r\eta$ ont comme seuls pôles ∞_+ et ∞_-, qui sont simples et de résidus $-r$ et r. Ainsi, $\mathrm{d}f/f - r\eta$ est une forme holomorphe, qui peut donc s'écrire comme une combinaison linéaire des $x^j\,\mathrm{d}x/y$ pour $j = 0, \dots g-1$. Nous savons que les périodes de η sur les $[b_{j-1}, a_j]$ sont nulles. Pour montrer que cette combinaison linéaire est nulle, grâce à l'accouplement parfait (théorème 4.2), il suffit de montrer que les périodes de $\mathrm{d}f/f$ sur les $[b_{j-1}, a_j]$ sont également nulles.

Fixons $j \in \{0, \dots, g\}$. Une réalisation de y sur les $[b_{j-1}, a_j]$ est $y = \sqrt{D(x)}$, car $D(x)$ y est positif. On peut voir alors $f(x) = P(x) + \sqrt{D(x)}Q(x)$ comme une fonction réelle sur $[b_{j-1}, a_j]$.On a $|f(b_{j-1})| = |P(b_{j-1})| = M$, $|f(a_j)| = |P(a_j)| = M$. Comme $(P + \sqrt{D}Q)(P - \sqrt{D}Q) = M^2$, la fonction f ne s'annule pas, donc est de signe constant $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ sur $[b_{j-1}, a_j]$. Donc $f(b_{j-1}) = f(a_j) = \varepsilon M$. Ainsi

$$\int_{b_{j-1}}^{a_j} \frac{\mathrm{d}f}{f} = \int_{b_{j-1}}^{a_j} \mathrm{d}(\log(\varepsilon f)) = \log(\varepsilon f(a_j)) - \log(\varepsilon f(b_{j-1})) = 0,$$

d'où le résultat souhaité. □

Montrons finalement la proposition 4.5 dans le cas général. On a plus précisément :

Proposition 4.10 Posons $\eta_j = \displaystyle\int_{a_j}^{b_j} \frac{R(x)}{i\sqrt{-D(x)}}\,\mathrm{d}x$ et $r_j = r\,|\eta_j|\,/\pi$ pour $j = 0, \dots, g$.

1. Le nombre de racines de P dans $E_j = [a_j, b_j]$ est r_j.
2. Les racines de P et Q sont simples, entrelacées, et appartiennent toutes à $\overset{\circ}{E}$.
3. Les racines de Q dans E_j divisent E_j en r_j sous-intervalles ; dans chacun d'entre eux, le polynôme P est soit strictement croissant, soit strictement décroissant, de valeurs extrêmes M et $-M$.

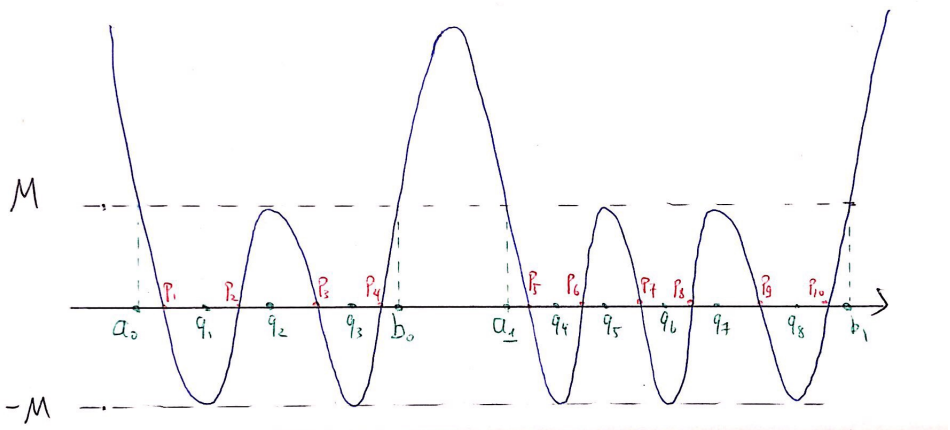


Figure 13 – Allure de P, cas $g = 1$, $r_0 = 4$, $r_1 = 6$

Démonstration. Le début de la preuve est identique au cas où $g = 0$. Fixons $j \in \{0, \dots, g\}$ et plaçons-nous sur le segment $E_j = [a_j, b_j]$. f se réalise sur E_j avec $f(x) = P(x) + i\sqrt{-D(x)}Q(x)$. On a $|f| = M$ constant, donc $f(x) = Me^{i\theta(x)}$, avec $\theta : E_j \to \mathbb{R}$ continue, et $\theta(a_j) = c_0\pi, \theta(b_j) = c_1\pi$, avec $c_0, c_1 \in \mathbb{Z}$ car $f(a_j), f(b_j)$ valent $\pm M$. On a donc

$$P(x) = M\cos(\theta(x)), \quad \sqrt{-D(x)}Q(x) = M\sin(\theta(x)).$$

Puisque $\mathrm{d}f/f = r\eta = rR(x)\,\mathrm{d}x/y$ et que R ne s'annule pas sur E_j selon la remarque 4.3, la dérivée f' ne s'annule pas sur E_j. Donc θ est strictement monotone sur E_j, donc le nombre de racines de P dans E_j est $|c_1 - c_0|$, le nombre de racines de Q dans E_j est $|c_1 - c_0| - 1$ (car D ne s'annule qu'aux extrémités).

Il reste à déterminer $|c_1 - c_0|$. On remarque que :

$$(c_1 - c_0)i\pi = i(\theta(b_j) - \theta(a_j)) = i\int_{a_j}^{b_j} \mathrm{d}\theta = \int_{a_j}^{b_j} \mathrm{d}f/f = r\eta_j.$$

Par conséquent, $|c_1 - c_0| = r\,|\eta_j|\,/\pi = r_j$. Donc le nombre de racines de P dans E_j est bien r_j. Comme P est de degré r, on a dans un premier temps

$$\sum_{j=0}^{g} r_j \leqslant r.$$

Or la proposition 4.8 montre qu'il existe des $(\epsilon_j)_{0\leq j\leq g} \in \{-1,1\}^{g+1}$ tels que

$$\sum_{j=0}^{g} \pm r_j = r.$$

On en déduit que $\sum_{j=0}^{g} r_j = r$. Ainsi, P n'a pas d'autre racine que celles dans les E_j. La forme sinusoïdale de P et Q donne ensuite les points 2 et 3 de la proposition, du fait que θ est strictement monotone. □

4.2.4 • Fin de la démonstration du théorème de Robinson

La proposition 4.5, qui décrit précisément le comportement des polynômes P et Q, est la clé de la démonstration du théorème de Robinson. Commençons par quelques conséquences immédiates de ce résultat.

Rappelons les notations : $E = \bigcup_{j=0}^{g} E_j$, $E_j = [a_j, b_j]$, $D(X) = \prod_{j=0}^{g}(X-a_j)(X-b_j)$, $P^2 - DQ^2 = M^2$, $\deg P = r$.

Proposition 4.11 $\mathrm{Cap}(E) = (\frac{M}{2})^{1/r}$.

Démonstration. Ceci est une conséquence du corollaire 2.11. En effet, les propositions 4.4 et 4.5 montrent que $P^{-1}([-M,M]) = E$. Or $\mathrm{Cap}([-M,M]) = \frac{M}{2}$ et P est unitaire de degré r, le corollaire 2.11 donne $\mathrm{Cap}(E) = P^{-1}([-M,M]) = (\frac{M}{2})^{1/r}$. □

Proposition 4.12 P est le polynôme de Tchebychev de E de degré r.

Démonstration. La proposition 4.5 montre que P, unitaire de degré r, atteint les valeurs extrêmes $\pm M$ $r+1$ fois sur E, d'où le résultat par le théorème d'équioscillation 2.9. □

Énonçons un dernier lemme très simple mais qui joue un rôle important dans la démonstration : une petite perturbation ne change pas le nombre de racines de P dans E.

Lemme 4.1 Soit $q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $|q(x)| < M$ pour tout $x \in E$. Alors $P - q$ a au moins r racines dans E.

Démonstration. Notons $q_1 < \cdots < q_{r-1}$ les racines de Q et notons $q_0 = a$ et $q_r = b$. $P(q_i) = \pm M$ et comme $|q(q_i)| < M$, donc $P(q_i) - q(q_i)$ est du même signe que $P(q_i)$. Ainsi $P - q$ change de signe sur chaque intervalle $[q_i, q_i + 1]$, pour i allant de 0 à $r-1$, d'où le résultat. □

Nous avons désormais tous les éléments pour finir la démonstration du théorème de Robinson. Ramenons d'abord tous les coefficients réels à des coefficients rationnels.

Proposition 4.13 On peut remplacer M, P, Q, D, E par $\tilde{M}, \tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{D}, \tilde{E}$ de telle sorte que la proposition 4.5 soit toujours vérifiée, mais avec $\tilde{M} \in \mathbb{Q}$, $\tilde{P} \in \mathbb{Q}[X]$ (toujours de degré r), $\tilde{D} \in \mathbb{Q}[X]$, $\tilde{Q} = 1$, $\tilde{E} \subset E$ et $\mathrm{Cap}(\tilde{E})$ arbitrairement proche de $\mathrm{Cap}(E)$.

Démonstration. Soit $\tilde{M} \in [0, M] \cap \mathbb{Q}$. Selon le lemme 4.1 appliqué à $q = \pm M$, $P^2 - \tilde{M}^2$ admet $2r$ racines dans $E : u_1 < \cdots < u_{2r}$ avec $[u_i, u_{i+1}] \subset [q_i, q_{i+1}]$, où les q_i sont les racines de Q. Par la continuité des racines, on peut choisir $\tilde{P}$ à coefficients rationnels suffisamment proche de P de sorte que les racines de $\tilde{P}^2 - \tilde{M}^2$ soient toujours ordonnées de la même manière $\tilde{u}_1 < \cdots < \tilde{u}_{2r}$. On pose alors $\tilde{D} = \tilde{P}^2 - \tilde{M}^2$, $\tilde{E} = \bigcup [\tilde{u}_i, \tilde{u}_{i+1}] \subset E$. Comme $\mathrm{Cap}(\tilde{E}) = (\frac{\tilde{M}}{2})^{\frac{1}{r}}$, on peut choisir $\tilde{M}$ rationnel suffisamment proche de M de sorte que $\mathrm{Cap}(\tilde{E})$ soit arbitrairement proche de $\mathrm{Cap}(E)$. □

Supposons dès lors que P, Q, D, M soient à coefficients rationnels. Démontrons alors le théorème de Robinson, dans le cas de Pell-Abel.

Théorème 4.5 (Robinson). Si $\mathrm{Cap}(E) > 1$, alors il existe un nombre infini d'entiers algébriques totalement dans E. Plus précisément, il existe une suite de polynômes unitaires à coefficients entiers de degré tendant vers l'infini tels que leurs racines soient toutes dans E.

Démonstration. Comme $\mathrm{Cap}(E) = (\frac{M}{2})^{1/r}$, $\mathrm{Cap}(E) > 1$ équivaut à $M > 2$. Posons $\lambda = \frac{M}{2}$. On a donc $\lambda > 1$.

Nous avons déjà un polynôme à coefficients rationnels ayant toutes ses racines dans E : P. Pour en trouver d'autres, l'idée consiste à élever le polynôme à de très grandes puissances. Mais au lieu de le faire pour P comme dans la démonstration du théorème de Fekete-Szegö 3.3, nous allons le faire pour $f = P + yQ$.

Nous avons vu que $f(x) = P(x) + iy_1(x)Q(x) = 2\lambda e^{i\theta(x)}$. Ainsi $f(x)^n = (2\lambda)^n e^{in\theta(x)} = 2^{n-1}(P_n(x) + iy_1(x)Q_n(x))$, avec $P_n, Q_n \in \mathbb{Q}[X]$ unitaires. On peut également écrire P_n sous la forme

$$P_n(x) = 2\lambda^n \cos(n\theta(x))$$

Soit T_n le polynôme de Tchebychev du segment $[-2, 2]$, on a ainsi $P_n = \lambda^n T_n(P/\lambda)$. Avec la formule explicite de T_n :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \frac{n}{k} \binom{n-k-1}{k-1} X^{n-2k}$$

Nous pouvons développer totalement le polynôme P_n sous la forme :

$$P_n(X) = X^{nr} + \sum_{k=1}^{nr} \alpha_k X^{nr-k}$$

avec $\alpha_k \in \mathbb{Q}$. Le but maintenant est de perturber P_n par un polynôme q_n de degré $< nr$, tel que $P_n - q_n \in \mathbb{Z}[X]$ et que $q_n(x) < 2\lambda^n$ sur E. Dès lors, en vertu du lemme 4.1, $P_n - q_n$ aura toutes ses nr racines dans E et est unitaire à coefficients entiers. Nous allons voir que cela est possible pour une infinité de n tendant vers $+\infty$, ce qui achèvera la démonstration.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $P = X^r + \frac{1}{m}\Gamma$, où $\Gamma \in \mathbb{Z}[X]$. Soit $l \in \mathbb{N}^*$ un entier arbitraire (qu'on fixera ultérieurement). Posons $n_l = (l!)^2 m^l$. Si $0 \leqslant k \leqslant l$, on a $k!\, m^k$ divise n_l ; si $0 \leqslant 2i + j \leqslant l$, on a $m^j\, i!\, j!$ divise n_l. Ainsi on vérifie que $\alpha_1, \ldots, \alpha_{lr}$ sont entiers. Il reste dans la somme un polynôme R_n de degré au plus $nr - lr - 1$ qui est à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Choisissons $(X^j P_k(X))_{0 \leqslant j < r,\ 0 \leqslant k < n-l}$ comme base de $\mathbb{Q}_{nr-lr-1}[X]$, et choisissons $c_{j,k} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[$ tel que $P_{n_l} - q_{n_l} \in \mathbb{Z}[X]$ (c.f. la démonstration du lemme 3.1), où on pose

$$q_{n_l} = \sum_{0 \leqslant j < r} \sum_{0 \leqslant k < n-l} c_{j,k} X^j P_k$$

Rappelons que P_k oscille entre $\pm 2\lambda^k$. Notons $C = \max_{x\in E}(\sum_{k=0}^{r-1} |x|^k)$. Comme $\lambda > 1$, il existe l_0 tel que pour tout $l > l_0$, $\frac{C}{\lambda^l(\lambda-1)} < 1$. Ainsi pour $l \geqslant l_0$:

$$|q_{n_l}(x)| \leqslant \sum_{j,k} |x|^j \, 2\lambda^k \leqslant 2C \sum_{k=0}^{n-l-1} \lambda^k \leqslant 2C\frac{\lambda^{n-l}}{\lambda-1} < 2\lambda^n$$

Ainsi, on a construit une suite de polynômes unitaires à coefficients entiers de degré tendant vers l'infini qui ont toutes leurs racines dans E (à savoir la suite $(P_{n_l} - q_{n_l})_{l\geqslant l_0}$). Le théorème est ainsi prouvé. □

En peaufinant cette démonstration et en utilisant le fait qu'une application polynomiale transforme une mesure d'équilibre en une mesure d'équilibre, nous avons le théorème suivant qui est plus fort :

Théorème 4.6 Pour la suite P_n précédemment construite, notons μ_{P_n} la mesure de comptage des racines de P_n normalisée. On a alors $\mu_{P_n} \xrightarrow{*} \mu_K$, où μ_K la mesure d'équilibre de E.

Ce résultat est profond. Nous avons non seulement construit une infinité d'entiers algébriques totalement dans le compact E, nous savons de plus qu'ils sont équidistribués suivant la mesure d'équilibre de E. Cela répond partiellement à la question posée dans l'introduction, à savoir la distribution des entiers algébriques totalement dans un compact. La démonstration de ce théorème se trouve dans l'article de Serre [5].

4.2.5 • Ramener le cas général au cas de Pell-Abel

Nous indiquons les arguments permettant de ramener le cas général au cas de Pell-Abel. Fixons $g \geqslant 0$. Notons

$$U = \{(a_0, b_0, \ldots, a_g, b_g) \in \mathbb{R}^{2g+2} \mid a_0 < b_0 < \cdots < a_g < b_g\}$$

Notons U_{PA} le sous-ensemble de U tel que pour le polynôme $D = \prod_{j=0}^{g}(X - a_j)(X - b_j)$, l'équation de Pell-Abel admet une solution. Nous avons le résultat suivant :

Théorème 4.7 U_{PA} est dense dans U.

On expose ici les idées principales de la démonstration. À un élément $u \in U$, on peut associer un point sur la jacobienne de la courbe $y^2 = D(x)$: $\nu(u) = \infty_- - \infty_+ \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$. Le théorème 4.1 affirme que $u \in U_{PA}$ si et seulement si $\nu(u) = \infty_- - \infty_+$ est un point d'ordre fini (un point de torsion) sur la jacobienne. Or on peut relever $\nu : U \to \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$ en une application continue $\theta : U \to \mathbb{Q}^g$, et $\nu(u)$ est un point d'ordre fini dans $\mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$ si et seulement si $\theta(u) \in \mathbb{Q}^g$. On conclut ensuite par la densité de $\mathbb{Q}^g$ dans $\mathbb{R}^g$. Plus de détails de la démonstration se trouvent dans l'article de Serre [5].

À partir du théorème 4.6, il est aisé de ramener le cas général au cas de Pell-Abel. En effet, si E_u une réunion de segments donnée par $u \in U$ telle que $\mathrm{Cap}(E_u) > 1$, on peut alors trouver $u' \in U_{PA}$ arbitrairement proche de u de sorte que l'on a toujours $\mathrm{Cap}(E_{u'}) > 1$, par continuité de $\mathrm{Cap}(E_u)$ par rapport à u (corollaire 2.2).

CONCLUSION

Dans ce mémoire nous avons répondu dans la grande majorité des cas à la problématique initiale qui était :

« Quels segments de $\mathbb{R}$ possèdent une infinité d'entiers algébriques totalement inclus dedans ? »

Dans un premier temps, en s'appuyant sur des remarques « élémentaires » et des résultats numériques, nous avons eu l'intuition que les segments de longueur supérieure à 4 avaient une infinité d'entiers algébriques totalement inclus dedans alors que les segments de longueur inférieure à 4 n'en ont qu'un nombre fini. Cependant pour pouvoir démontrer ces conjectures il a fallu voir notre problématique comme un cas particulier d'un problème plus général et ne plus seulement considérer les segments de $\mathbb{R}$ mais tous les compacts du plan complexe.

Nous avons dû préciser la notion de taille pour avoir un équivalent pour les compacts de $\mathbb{C}$ de la longueur d'un segment, nous avons ainsi expliqué la notion de capacité issue de la théorie du potentiel. À l'aide de cette notion, nous avons mis en évidence que la valeur limite de la capacité pour ce problème est 1. La théorie du potentiel donne plusieurs résultats dans ce sens mais pour le cas des segments de $\mathbb{R}$, il est nécessaire de la combiner à des propriétés de géométrie algébrique pour obtenir les résultats voulus.

Les résultats « élémentaires » de la partie 1 nous ont permis de développer les intuitions suivantes :

1. La capacité est la mesure de la taille des compacts de $\mathbb{C}$ adaptée à notre problème.
2. Généralement les compacts de capacité inférieure à un (dont les segments de longueur inférieure à 4) possèdent un nombre fini d'entiers algébriques totalement inclus dedans.
3. Généralement les compacts de capacité plus grande que un (dont les segments de longueur supérieure à 4) possèdent une infinité d'entiers algébriques totalement inclus dedans.

La suite de notre mémoire consiste à prouver des résultats qui vont dans le sens de ces intuitions. Les principaux sont exposés ci-dessous.

Le premier théorème issu de la théorie du potentiel permet de résoudre totalement le deuxième point :

Théorème (Fekete). Tous les compacts de capacité strictement inférieure à 1 possèdent un nombre fini d'entiers algébriques totalement inclus dedans.

Corollaire Tous les segments de longueur strictement inférieure à 4 possèdent un nombre fini d'entiers algébriques totalement inclus dedans.

Le troisième point est plus complexe. La théorie du potentiel donne un premier résultat :

Théorème (Fekete-Szegö). Soit un compact de $\mathbb{C}$ de capacité supérieure ou égale à 1 symétrique par rapport à la conjugaison complexe. Alors tout voisinage (de complémentaire connexe) de ce compact possède un nombre infini d'entiers algébriques totalement inclus dedans.

Cependant contrairement au théorème précédent ce théorème n'est pas applicable aux segments de $\mathbb{R}$. En mélangeant des notions de courbes algébriques aux notions introduites dans le précédent théorème, on obtient un théorème beaucoup plus fort qui complète la discussion pour les segments de $\mathbb{R}$.

Théorème (Robinson). Une réunion finie d'intervalles de $\mathbb{R}$ de capacité strictement supérieure à 1 possède une infinité d'entiers algébriques totalement inclus dedans.

Corollaire Tous les segments de longueur strictement supérieure à 4 possèdent une infinité d'entiers algébriques totalement inclus dedans.

Nous donnons ici plusieurs pistes de réflexion pour le lecteur intéressé. De nombreux problèmes restent ouverts.

Dans le cas des segments de $\mathbb{R}$, la situation où la longueur du segment est égale à 4 n'est pas connue, sauf dans le cas où les bords du segment sont entiers. On sait qu'il existe alors un nombre infini d'entiers algébriques totalement inclus dedans. Que se passe-t-il si le segment est de longueur 4 et que les bords ne sont pas entiers ?

Ensuite, dans ce mémoire nous nous sommes principalement intéressés à la finitude des entiers algébriques totalement dans un segment, un prolongement naturel serait de chercher à en savoir plus sur ces nombres et en particulier connaître leur répartition. Certains résultats sont contenus dans notre mémoire. Par exemple, nous avons explicité les entiers algébriques totalement dans le segment $[-2, 2]$. De plus, pour un segment E de longueur strictement supérieure à 4, en peaufinant la démonstration du théorème de Robinson, on peut démontrer l'existence d'une suite de polynômes unitaires à coefficients entiers ayant toutes leurs racines incluses dans E et dont les mesures de comptage des racines convergent faiblement-* vers la mesure d'équilibre de E (4.6). Considérons une suite d'entiers algébriques distincts totalement dans E. Les mesures de comptage des racines de leur polynôme minimal convergent-elles faiblement-* vers la mesure d'équilibre de E ?

A
ÉLÉMENTS DE THÉORIE DE LA MESURE

A.1 Mesures

La notion de mesure que l'on considère ici est la mesure de Radon.

Définition A.1 (Mesure de Radon). Soit $D \subset \mathbb{C}$ et on note $C_c^0(D, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues à support compact sur D.

On appelle *mesure de Radon* toute forme linéaire continue sur $C_c^0(D, \mathbb{R})$.

Pour μ une mesure de Radon, on note $\displaystyle\int_D f \, \mathrm{d}\mu = \mu(f)$.

Exemple A.1 (Mesure de Dirac). Soit $z_0 \in D$, la mesure de Dirac en z, noté δ_{z_0}, est la forme linéaire continue qui à $f \in C_c^0(D, \mathbb{R})$ associe $f(z_0)$, *i.e.* $\displaystyle\int f \, \mathrm{d}\delta_{z_0} = f(z_0)$.

Exemple A.2 (Mesure de comptage (moyennée)). Soit $F = \{z_1, \dots, z_n\}$ un sous-ensemble fini de D, la mesure de comptage (moyennée) par rapport à F est donnée par $\nu_F = \frac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \delta_{z_i}$, *i.e.* $\displaystyle\int f \, \mathrm{d}\nu_F = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(z_i)$.

Définition A.2 (Mesure d'un ensemble). Soit μ une mesure sur $D \subset \mathbb{C}$.

1. Si D est compact, la mesure de D est $\mu(D) := \displaystyle\int_D 1 \, \mathrm{d}\mu$.
2. Si $K \subset D$ est un compact, alors $\mu(K) = \displaystyle\int_D \mathbb{1}_K \, \mathrm{d}\mu = \int_K 1 \, \mathrm{d}\mu$.
3. Si $D = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ avec $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de compact, alors la mesure de D est $\mu(D) := \lim_{n\to\infty} \mu(K_n)$.
4. Si $\mu(D) = 1$, on dit que μ est une mesure de probabilité sur D.

Remarque A.1 $\int_D \mathbb{1}_K \, \mathrm{d}\mu = \int_K 1 \, \mathrm{d}\mu$ est définie comme $\inf\{\mu(f) : f \in C_c^0(D, \mathbb{R}), 0 \le f \le 1, f|_K = 1\}$.

Définition A.3 (Support d'une mesure). Soit μ une mesure sur $D \subset \mathbb{C}$ et $U \subset D$. On dit que μ est à support dans U si et seulement si

$$\forall f \in C_c^0(D, \mathbb{R}), f|_U = 0 \Rightarrow \int_D f \, \mathrm{d}\mu = 0$$

Le *support* de μ est l'intersection de toutes les clôtures de ce type de U, ou également le plus petit fermé U dans D vérifiant la condition ci-dessus. Le support de μ est noté comme $\mathrm{supp}(\mu)$.

Définition A.4 (Restriction/Extension de la mesure). Soit μ une mesure sur D à support dans un compact $K \subset D$. Pour toute $f \in C^0(K, \mathbb{R})$, il existe $f' \in C_c^0(D, \mathbb{R})$ tel que $f'|_K = f$, on définit les intégrales

$$\mu(f) := \int_K f \, \mathrm{d}\mu := \int_D f' \, \mathrm{d}\mu$$

cela ne dépend pas de choix de f' ; μ devient ainsi une mesure restreinte dans K (que l'on notera μ par abuse de langage). Pour toute $f \in C^0(D, \mathbb{R})$, on a l'intégrale bien défini

$$\mu(f) := \int_D f \, \mathrm{d}\mu := \mu(f|_K)$$

qui étend la définition de μ à $C^0(D, \mathbb{R})$.

Remarque A.2 Soit μ une mesure sur D à support dans un compact K, alors $\mu(D) = \mu(K) = \int_D 1 \, \mathrm{d}\mu$.

Remarque A.3 À partir de ces définitions, on peut définir une mesure $\tilde{\mu}$ comme

$$\tilde{\mu}(A) = \inf_{U \supset A} \sup_{K \subset U} \mu(K)$$

où U ouverts et K fermés, d'où l'intégrale de façon classique sur un sous-ensemble de D mesurable quelconque, qui coïncidera avec μ sur $C_c^0(D, \mathbb{R})$; pareil pour le support, la restriction et l'extension de la mesure.

A.2 Convergence faible-$*$

Définissons maintenant la notion importante de la convergence faible-$*$ des mesures.

Définition A.5 (Convergence faible-$*$). Soit $D \subset \mathbb{C}$ et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesure sur D. Soit μ une mesure sur D. On dit que $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers μ, noté $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$, si et seulement si

$$\forall f \in C_c^0(D, \mathbb{R}), \ \lim_{n\to\infty} \int_D f \, \mathrm{d}\mu_n = \int_D f \, \mathrm{d}\mu.$$

Exemple A.3 (Intégrale de Riemann). Nous pouvons voir l'intégrale de Riemann comme la mesure limite d'une suite de mesure de comptage : en effet, si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f \ \mathrm{d}x.$$

Si on note ν_n la mesure de comptage par rapport aux points $\{\frac{k}{n} \mid k = 0, \ldots, n\}$, la forme linéaire continue $\int_0^1$ est la mesure limite de la suite (ν_n) pour la convergence faible-$*$.

Exemple A.4 Si ν_n est la mesure de comptage par rapport aux racines n-ième de l'unité $\{e^{\frac{2\pi i k}{n}} \mid k =$

$0, \dots, n-1\}$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int f \, \mathrm{d}\nu_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \, \mathrm{d}\theta.$$

Proposition A.1 Soit K un compact de $\mathbb{C}$ tel que $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ avec $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts. Si on a une suite de mesures de probabilité $(\mu_n)_n$ telle que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ et $\mathrm{supp}(\mu_n) \subset B_n$ pour chaque n, alors $\mathrm{supp}(\mu) \subset K$.

Démonstration. Soit $f \in C_c^0(D, \mathbb{R})$ telle que $f|_K = 0$, montrons que pour tout $\epsilon > 0$, on a $\left|\int_K f \, \mathrm{d}\mu\right| < \epsilon$. L'ouvert (car f est continue) $U := \{|f| < \epsilon\}$ contient $K = \bigcap_n B_n$. Comme tous K_i sont compacts, il existe un entier N tel que $\forall\, n \geq N, B_n \subset U$. Soit maintenant $\phi_n \in C_c^0(D, \mathbb{R})$ telle que

$$\phi_n|_{B_n} = 1, \quad \phi_n|_{U^c} = 0, \quad 0 \leq \phi_n \leq 1$$

alors pour tout $n \geq N$, $|\phi_n f| < \epsilon, (1-\phi_n) f|_{B_n} = 0$, puis $\left|\int_D f \, \mathrm{d}\mu_n\right| = \left|\int_D \phi_n f \, \mathrm{d}\mu_n\right| < \epsilon$; puis $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ donne $\left|\int_K f \, \mathrm{d}\mu\right| \leq \epsilon$ □

Nous nous intéressons maintenant à l'espace des mesures sur un espace topologique donné. Soit X un espace métrique compact, on note $C(X)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur X.

Théorème A.1 (Banach-Alaoglu-Bourbaki). $\mathcal{P}(X)$ est un espace séquentiellement compact pour la topologie associée à la convergence faible-$*$.

Autrement dit, pour toute suite de mesures de probabilité $(\mu_n)_n$, il existe une sous-suite $(\mu_{\varphi(n)})_n$ et une mesure de probabilité μ telles que $\mu_{\varphi(n)} \xrightarrow{*} \mu$, *i.e.*

$$\forall \phi \in C(X), \int_X \phi \ \mathrm{d}\mu_{\varphi(n)} \longrightarrow \int_X \phi \ \mathrm{d}\mu$$

Démonstration.

X étant un espace métrique compact, $C(X)$ est séparable, c'est-à-dire qu'on a une suite $(\phi_n)_n$ dense dans $C(X)$.

L'idée de la démonstration est de faire une extraction diagonale. Pour ϕ_1, on a $(\int_X \phi_1 \, d\mu_n)_n$ qui est bornée, on peut donc en extraire une sous-suite $(\mu_{\varphi_1(n)})_n$ telle que $\int_X \phi_1 \, d\mu_{\varphi_1(n)}$ converge. On extrait alors de la même façon $(\mu_{\varphi_2(n)})_n$ de la suite $(\mu_{\varphi_1(n)})_n$. On construit ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}, (\mu_{\varphi_k(n)})_n$ qui est extraite des suites précédentes.

On considère alors la suite $(\mu_{\varphi_n(n)})_n$. Alors, si $k \in \mathbb{N}, (\int_X \phi_k \, d\mu_{\varphi_n(n)})_n$ converge car pour n assez grand, φ_n est extraite de φ_k. Par densité de $(\phi_n)_n$, $(\int_X \phi \, d\mu_{\varphi_n(n)})_n$ converge pour $\phi \in C(X)$.

On définit alors la forme

$$\Lambda : C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\phi \longmapsto \lim_{n\to+\infty} \int_X \phi \, d\mu_{\varphi_n(n)}$$

Cette forme est clairement linéaire positive (ces deux propriétés passent à la limite), donc par le théorème de représentation de Riesz, on peut écrire : $\Lambda(\phi) = \int_X \phi \, d\mu$ où μ est une mesure a priori quelconque sur $C(X)$.

Pour montrer la compacité de $\mathcal{P}(X)$, il suffit de montrer que $\mu \in \mathcal{P}(X)$, puisque par construction, on a $\forall \phi \in C(X), \int_X \phi \, d\mu_{\varphi_n(n)} \longrightarrow \int_X \phi \, d\mu$. Or, on a : *masse de* $\mu = \int_X d\mu = \lim_{k\to+\infty} \int_X d\mu_{\varphi_n(n)} = 1$, ce qui conclut la démonstration. □

A.3 Fonctions semi-continues inférieurement

On souhaite étendre le concept de mesure et de convergence faible-$*$ à des fonctions pas nécessairement continues.

Définition A.6 (Fonctions semi-continues inférieurement). Une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est dite *semi-continue inférieurement (s.c.i.)* si l'une des propiétés équivalentes suivantes est satisfaite :

(i) $\forall z_0 \in D, f(z_0) \leqslant \liminf_{z\to z_0} f(z)$

(ii) Sur tout compact $K \subset D$, f est la limite simple d'une suite croissante de fonctions continues

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\{f > \alpha\} := f^{-1}(]-\infty, \alpha[)$ est un ouvert.

Définition A.7 Soit f une fonction s.c.i. et μ est une mesure positive à support dans un compact $K \subset D$. On définit l'intégrale de f par rapport à μ :

$$\int_K f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_K f_n \, \mathrm{d}\mu$$

où (f_n) est une suite croissante de fonction continues sur K convergeant simplement vers $f|_K$

Proposition A.2 Toute fonction s.c.i. définie sur un compact admet un point de minimum.

Démonstration. Considérons d'abord les ensembles $\{f > n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ et ensuite $\{f \leq \frac{1}{n} + \inf f\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. □

Proposition A.3 Soient f une fonction s.c.i. vérifiant $f|_K \geq \alpha$ et $\mu \in \mathcal{P}(D)$, $\mathrm{supp}(\mu) = K \subset D$. Alors $\int_K f \, \mathrm{d}\mu \geq \alpha$; en plus, $\int_K f \, \mathrm{d}\mu = \alpha$ ssi $f|_K \equiv \alpha$.

Démonstration. Comme μ est une mesure de probabilité, on se ramène au cas où $\alpha = 0$. Soit (f_n) une suite croissante de fonctions continues sur K convergeant simplement vers $f|_K \geq 0$, alors $\forall \epsilon > 0$, $K = \cup_{n\geq 1}\{f_n > -\epsilon\}$; par compacité, $\exists N \, \forall n \geq N, f_n > -\epsilon$ sur K, qui implique $\int_K f \, \mathrm{d}\mu \geq -\epsilon$. Donc $\int_K f \, \mathrm{d}\mu \geq 0$.

Pour la deuxième assertion, supposons qu'il existe $\zeta_0 \in K$ tel que $f(\zeta_0) > 0$, alors on aura $\int_K f \, \mathrm{d}\mu > 0$. En effet, il existe deux voisinages ouvert $B_1 \Subset B_2$ de ζ_0 dans D tel que $f|_{B_2} \geq \frac{1}{2} f(\zeta_0)$, soit $\chi \in C_c^0(B_2, \mathbb{R})$ telle que $\chi|_{B_1} = 1$ et $0 \leq \chi \leq 1$, alors $f - \frac{1}{2} f(\zeta_0)\chi$ est une fonction s.c.i sur D et positive sur K ; par ce qui précède, $\int_K (f - \frac{1}{2} f(\zeta_0)\chi) \, \mathrm{d}\mu \geq 0$, alors $\int_K f \, \mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{2} f(\zeta_0) \int_K \chi \, \mathrm{d}\mu$; ce dernier est strictement positif, sinon on vérifira par définition que $\mathrm{supp}(\mu) \subset K \backslash B_1 \subsetneq K$ (soit $\phi \in C_c^0(D, \mathbb{R})$ telle que $\phi|_{K\backslash B_1} = 0$, alors $(1-\chi)\phi^{\pm}|_K = 0$, $\int_K \phi^{\pm} \, \mathrm{d}\mu = \int_K \chi\phi^{\pm} \, \mathrm{d}\mu \leq \|\phi\|_\infty \int_K \chi \, \mathrm{d}\mu = 0$, puis $\int_K \phi \, \mathrm{d}\mu = 0$), ce qui est une contradiction. □

Proposition A.4 Soit f une fonction semi-continue inférieure et (μ_n) une suite de mesures positives à support inclus dans un compact K tel que $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ alors :

$$\int_K f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_K f \, \mathrm{d}\mu_n$$

Démonstration. Soit (f_n) une suite croissante de fonctions continues qui converge vers f et soit $\epsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\int_K f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \int_K f \, \mathrm{d}\mu - \epsilon$. Il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $m \geq m_0$, $\int_K f_n \, \mathrm{d}\mu_m \geq \int_K f_n \, \mathrm{d}\mu - \epsilon$. Puis :

$$\forall m \geq m_0, \int_K f d\mu_m \geq \int_K f_n \, \mathrm{d}\mu_m \geq \int_K f \, \mathrm{d}\mu - 2\epsilon$$

D'où $\liminf_{m\to\infty} \int_K f \, \mathrm{d}\mu_m \geq \int_K f \, \mathrm{d}\mu - 2\epsilon$ □

Exemple A.5 Soit $z \in \mathbb{C}$, la fonction $t \mapsto \log(1/|z-t|)$ est semi-continue inférieurement, parce qu'elle est continue en $t \neq z$ et vaut $+\infty$ en $t = z$.

B
FONCTIONS SEMI-HARMONIQUES

Définition B.1 **(Fonctions (sur-,sous-)harmoniques).** Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite *harmonique* (*resp. surharmonique, sous-harmonique*) si elle est continue (*resp.* semi-continue inférieurement, semi-continue supérieurement) et si elle satisfait la *propriété de moyenne* (*resp. sur-moyenne, sous-moyenne*) : pour tout $z \in D$, si le disque $\{|\zeta - z| \leq r\} \subset D$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta \quad (resp.\ \geq, \leq)$$

On dit qu'une fonction est *semi-harmonique* si elle est harmonique, surharmonique ou sous-harmonique.

Intuitivement, dans le graphe 3D, une fonction *sur*harmonique prend ses valeurs *sur* ses moyennes locales ; elle ne peut prendre de trop grandes valeurs en vertu de la semi-continuité inférieure :

$$f(z) \leq \liminf_{\zeta \to z} f(\zeta).$$

Remarque B.1 Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue (*resp.* semi-continue inférieurement, semi-continue supérieurement). Alors f est harmonique (*resp.* surharmonique, sous-harmonique) si et seulement si elle satisfait la propriété de moyenne (*resp.* sur-moyenne, sous-moyenne) *locale* : pour tout $z \in D$, il existe $\delta > 0$ tel que la disque $\{|\zeta - z| \leq \delta\} \subset D$ et que pour tout $0 < r \leq \delta$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta \quad (resp.\ \geq, \leq)$$

Remarque B.2 Supposons $f \in C^2(D)$. Alors f est surharmonique si et seulement si $-\Delta f \geq 0$. Pour cela, on peut considérer la fonction

$$m(r; z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta$$

et utiliser la formule suivante

$$\partial_r m(r; z) = \frac{1}{2\pi\,|r|} \int_{B(z,|r|)} \Delta f.$$

Démonstration. En voyant f comme une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et en posant $\overrightarrow{n}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$:

$$\partial_r f((Re(z), Im(z)) + r\mathbf{n}(\theta)) = \overrightarrow{\nabla} f \cdot \overrightarrow{n}(\theta).$$

Puis par la formule de Green :

$$\begin{aligned} \partial_r m(r; z) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial B(z,r)} \overrightarrow{\nabla} f \cdot \overrightarrow{n}(\theta) \frac{\mathrm{d}l}{r} \\ &= \frac{1}{2\pi r} \iint_{B(0,r)} \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} f \cdot ds. \end{aligned}$$

□

Exemple B.1 Soit F une fonction holomorphe sur un ouvert $D \in \mathbb{C}$. Alors pour $p > 0$, $|F|^p$ et $\log|F|$ sont sous-harmoniques. En effet, il suffit de le montrer sur l'ouvert $\{F \neq 0\}$. Puisque localement F^p (*resp.* $\log F$) a une branche holomorphe, on peut vérifier la continuité et appliquer la formule intégrale de Cauchy, puis on utilise l'inégalité triangulaire pour l'intégrale (*resp.* on prend la partie réelle).

Proposition B.1 Soient f, g deux fonction surharmoniques sur U, alors $\min(f, g)$ est aussi surharmonique sur U.

Démonstration. Le minimum de deux fonctions semi-continue inférieurement est encore semi-continue inférieurement et la vérification de la propriété de sur-moyenne est directe. □

Théorème B.1 (Principe du minimum des fonctions surharmoniques). Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et borné. Soit f une fonction surharmonique non constante sur D telle que

$$\liminf_{z\to\zeta} f(z) \geq m, \quad \forall \zeta \in \partial D$$

Alors $f(z) > m$ pour tout $z \in D$. Par conséquent, aucune fonction surharmonique non constante sur un ouvert connexe (non nécessairement borné) n'atteint son minimum.

Démonstration. L'idée est d'utiliser la propriété de sur-moyenne et un argument d'ouvert-fermé.

D'abord, on prolonge $f(z)$ à tout point $\zeta \in \partial D$ par $\tilde{f}(\zeta) = \liminf_{z\to\zeta} f(z)$ et $\tilde{f}|_D = f$; alors $\tilde{f}$ est bien une fonction semi-continue inférieurement sur $\overline{D}$ et surharmonique dans D. Comme $D \subset \mathbb{C}$ est borné et $\overline{D}$ est compact, $\tilde{f}$ atteint son minimum $m' = \min_{\bar{D}} \tilde{f}$ sur $\overline{D}$ (Prop. A.2).

Comme f est semi-continue inférieurement, l'ensemble $\{f = m'\} = \{f \leq m'\}$ est fermé dans D. D'autre part, pour tout $\zeta_0 \in D$ vérifiant $f(\zeta_0) = m'$, on a pour un certain $\delta > 0$ et tout $r \in]0, \delta]$,

$$m' = f(\zeta_0) \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta_0 + re^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta \geq m'$$

alors par Prop. A.3, pour tous $r \in]0, \delta]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, on a $f(\zeta_0 + re^{i\theta}) = f(\zeta_0) = m'$, c'est à dire $f \equiv m'$ dans un voisinage de ζ_0, ce qui montre que $\{f = m'\}$ est un ouvert de D. Ainsi, $\{f \leq m'\} = \{f = m'\}$ est un ouvert-fermé de D ; il n'est pas D comme f est non constante, donc il est vide par la connexité de D, c'est à dire, $f(z) > m'$, $\forall z \in D$.

D'ailleurs, comme m' est effectivement atteint par $\tilde{f}$, il existe $\zeta_0 \in \overline{D} \backslash D = \partial D$ tel que $\tilde{f}(\zeta_0) = m'$. Par définition de $\tilde{f}$ et l'hypothèse dans l'énoncé (finalement !), on a

$$\tilde{f}(\zeta_0) = \liminf_{z\to\zeta_0} f(z) \geq m$$

par suite $m' \geq m$. On en conclut que $f(z) > m$, $\forall z \in D$.

La deuxième assertion en résulte aussitôt si l'on tient compte au fait qu'elle est un résultat local. □

Corollaire B.1 (Principe du maximum pour les potentiels). Soit μ une mesure positive fini à support compact. Si $U^\mu(z) \leq M$ pour tout $z \in \mathrm{supp}(\mu)$, alors il en est de même pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Il résulte aussitôt de la dernière assertion du théorème. En effet, posons $K = \mathrm{supp}(\mu)$, et définissons $f(z) := -U^\mu(z)$, qui est une fonction harmonique, *a fortiori* surharmonique sur $\mathbb{C}\backslash K$. Elle est nonconstante et tend vers $+\infty$ lorsque $z \to \infty$. Pour tout $\zeta_0 \in \partial K$, on a

$$\liminf_{z\to\zeta_0} f(z) \geq -M. \tag{4}$$

Alors f atteint son minimum s'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $U^\mu(z) > M$.

Reste à démontrer (4). Soit $r > 0$. Écrivons d'abord

$$f(\zeta) - f(z) = \int \log\frac{|\zeta - t|}{z - t}\,\mathrm{d}\mu(t) = \left(\int_{K\cap B(\zeta_0,r)} + \int_{K\backslash B(\zeta_0,r)}\right) \log\frac{|\zeta - t|}{|z - t|}\,\mathrm{d}\mu(t).$$

Choissisons $\zeta = \zeta(z) \in \arg\min_{\zeta\in K} |\zeta - z|$, alors pour tout $t \in K$, on a

$$\frac{|\zeta - t|}{|z - t|} = \frac{|\zeta - z| + |z - t|}{|z - t|} \leq \frac{|t - z| + |z - t|}{|z - t|} = 2.$$

On en déduit

$$\int_{K\cap B(\zeta_0,r)} \log\frac{|\zeta - t|}{|z - t|}\,\mathrm{d}\mu(t) \leq 2\mu(B(\zeta_0, r)).$$

D'autre part, lorsque $z \to \zeta_0$, on a $\zeta \to \zeta_0$, donc

$$\int_{K\backslash B(\zeta_0,r)} \log\frac{|\zeta - t|}{|z - t|}\,\mathrm{d}\mu(t) \to \mu(B(\zeta_0, r)^c) \times \log(1) = 0.$$

L'hypothèse sur $U^\mu(z)$ entraîne $f(\zeta) \geq -M > -\infty$. En combinant se qui précède et en prenant la limite $z \to \zeta_0$, on obtient

$$\liminf_{z\to\zeta_0} f(z) \geq -M - 2\mu(B(\zeta_0, r)). \tag{5}$$

Comme $f \geq -M$ sur K par hypothèse, on a $f > -\infty$ partout sur $\mathbb{C}$ par la définition de $f = -U^\mu(z)$, donc

$$\lim_{r\to 0} \mu(B(\zeta_0, r)) = \mu(\{\zeta_0\}) = 0.$$

En combinant avec (5), on achève la démonstration de (4). □

On énonce le théorème suivant qui généralise le principe du minimum :

Théorème B.2 (Principe du minimum généralisé). Soit $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ un ouvert connexe tel que $\mathrm{Cap}(\partial D) > 0$ et f une fonction non constante, surharmonique et *bornée inférieurement* dans D, satisfaisant pour *q.t.* $\zeta \in \partial D$ l'inégalité :

$$\liminf_{z\to\zeta} f(z) \geq m.$$

Alors on a $f(z) > m$ pour tout $z \in D$.

Pour la démonstration, une bonne référence sera [10], Theorem 3.6.9.

Proposition B.2 (Tiré-en-arrière par application holomorphe). Soit f une fonction holomorphe non constante sur un ouvert connexe $D \subset \mathbb{C}$, soit $D' = f(D)$ (aussi un ouvert connexe). Alors pour toute fonction (sous-, sur-)harmonique $u : D' \to \mathbb{R}$, $u \circ f$ est aussi (sous-, sur-)harmonique.

On omettra sa démonstration ([10], Corollary 2.4.3). Cette proposition nous permet d'étendre la définition de fonctions (sous-, sur-)harmoniques à la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$:

Définition B.2 (Fonctions (sur-,sous-)harmoniques (suite)). Une fonction $f(z)$ définie dans un voisinage de ∞ (∞ inclus) est dite *(sous-,sur-)harmonique dans un voisinage de* ∞ si $f(1/z)$ en est dans un voisinage de 0. Une fonction $f : \overline{\mathbb{C}} \supset D \to \mathbb{R}$ est dite *(sous-,sur-)harmonique* si tout point de D admet un voisinage où f est *(sous-,sur-)harmonique.*

C
RASSEMBLEMENT DES DÉMONSTRATIONS TECHNIQUES

C.1 Démonstration de la proposition 2.6

Proposition C.1 Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact avec $\mathrm{Cap}(K) > 0$. Si Ω_K satisfait la condition de cône, alors Ω_K est régulier.

Démonstration. Montrons pour tout $\zeta_0 \in \partial\Omega_K$ que

$$\lim_{z\to\zeta_0} g_K(z,\infty) = 0$$

(i) D'abord, soit $\chi(z)$ une fonction positive surharmonique sur un ouvert connexe $\Omega_0 = \Omega_K \cap B(\zeta_0,\delta) \neq \emptyset$ telle que

$$A = \inf\left\{\chi(z) : z \in \Omega_K, \frac{\delta}{2} < |z-\zeta_0| < \delta\right\} > 0$$

$$\lim_{z\to\zeta_0} \chi(z) = 0.$$

Comme $g_K(\cdot,\infty)$ est bornée sur Ω_0 (Thm. 2.6), on peut choisir $M > 0$ suffisamment grand tel que $MA > g_K(\cdot,\infty)$ sur Ω_0 ; puis pour tout $\zeta \in \Omega_K \cap \partial B(\zeta_0,\delta)$, on a

$$\liminf_{z\to\zeta}(M\chi(z) - g_K(z,\infty)) \geq 0;$$

il en résulte aussi que $M\chi - g_K(\cdot,\infty)$ est *bornée inférieurement* sur Ω_0. De plus, comme χ est positive, on a pour tout $\zeta \in \partial\Omega_K$ tel que $|\zeta-\zeta_0| \leq \delta$

$$\liminf_{z\to\zeta} \chi(z) \geq 0$$

puis pour *q.t.* $\zeta \in \partial\Omega_K$,

$$\liminf_{z\to\zeta}(M\chi(z) - g_K(z,\infty)) \geq 0$$

D'autre part, χ est surharmonique dans Ω_0, puis $M\chi - g_K(\cdot,\infty)$ est surharmonique car $g_K(\cdot,\infty)$ est harmonique. Notons que

$$\partial\Omega_0 \subset \{\zeta \in \partial\Omega_K : |\zeta-\zeta_0| \leq \delta\} \cup \{\zeta \in \Omega_K : |\zeta-\zeta_0| = \delta\}$$

et que (Prop. 2.4(c)) $\mathrm{Cap}(\partial\Omega_0) = \mathrm{Cap}(\overline{\Omega_0}) > 0$ car Ω_0 est un ouvert non vide (Cor. 2.3(a)). Appliquant le principe du minimum généralisé à Ω_0, on obtient alors pour tout $z \in \Omega_0$

$$M\chi(z) - g_K(z,\infty) \geq 0$$

donc

$$0 = \lim_{z\to\zeta_0} M\chi(z) \geq \limsup_{z\to\zeta_0} g_K(z,\infty) \geq 0$$

$$\lim_{z\to\zeta_0} g_K(z,\infty) = 0$$

(ii) soit $\chi(z) > 0$ une fonction surharmonique sur $\Omega_1 = \Omega_K \cap B(\zeta_0,\delta) \neq \emptyset$ telle que

$$A = \inf\left\{\chi(z) : z \in \Omega_K, \frac{\delta}{2} < |z-\zeta_0| < \delta\right\} > 0$$

$$\lim_{z\to\zeta_0} \chi(z) = 0$$

Posons pour $z \in \Omega_K$

$$\tilde{\chi}(z) = \begin{cases} \min\left(\frac{\chi(z)}{A}, 1\right) & z \in \Omega_1 \\ 1 & z \in \Omega_K \backslash \Omega_1 \end{cases}$$

Par définition, $0 < \tilde{\chi} \leq 1$. Étant le minimum de deux fonction surharmonique, $\tilde{\chi}$ est surharmonique sur Ω_1 ; $\tilde{\chi} \equiv 1$ est surharmonique sur $\Omega_K \cap \{|z-\zeta_0| > \frac{\delta}{2}\}$; donc $\tilde{\chi}$ est surharmonique sur Ω_K. En plus,

$$\lim_{z\to\zeta_0} \tilde{\chi}(z) = 0$$

Soit $R > 2\delta$ assez grand tel que $\partial\Omega_K \subset B(\zeta_0, R)$, alors $\Omega_0 = \Omega_K \cap B(\zeta_0, R) \neq \emptyset$ est *connexe* puisque Ω_K est *connexe*. Aussi, on a

$$\inf\left\{\chi(z) : z \in \Omega_K, \frac{R}{2} < |z-\zeta_0| < R\right\} = 1 > 0$$

Alors on s'est ramené au cas (i) avec $(\chi,\delta) := (\tilde{\chi}, R)$.

(iii) Montrons, pour tout $\zeta_0 \in \partial\Omega_K$, l'existence d'une telle fonction χ dans (ii) (pour un cetain $\delta > 0$). Il s'agit du composé d'une transformation de Möbius et d'une branche de $\Re(1/\log w), |w| < 1$. Pour l'expliciter, selon la condition de cône, soit $\zeta_1 \neq \zeta_0$ tel que le segment $[\zeta_0,\zeta_1] \subset \mathbb{C}\backslash\Omega_K$. Ensuite prenons

$$\chi(z) = \Re\left(1\Big/\log\frac{z-\zeta_0}{z-\zeta_1}\right), \quad z \in \Omega_K, \left|\frac{z-\zeta_0}{z-\zeta_1}\right| < 1$$

avec δ bien choisi. La vérification est directe, compte tenu de Prop. B.2. □

Remarque C.1 Notons que l'on n'a utilisé la condition de cône que dans (iii) pour construire une paire (δ,χ) pour la partie (ii) ; donc, sans supposer la condition de cône, si l'on peut construire pour tout $\zeta_0 \in \partial\Omega_K$ une paire (δ,χ) satisfaisant les conditions dans la partie (ii) de la démonstration, alors Ω_K est régulier.

C.2 Démonstration du théorème 2.8

Théorème C.1 Soit $K_1, K_2 \subset \mathbb{C}$ deux compacts non vides. Soit $f : \Omega_{K_1} \cup \{\infty\} \to \Omega_{K_2} \cup \{\infty\}$ une application holomorphe non constante telle que $f(\infty) = \infty$. Alors,

(a) $|A_f| \operatorname{Cap}(K_1)^{n_f} \geq \operatorname{Cap}(K_2)$.

(b) Supposons en plus que :

(i) $\operatorname{Cap}(K_2) > 0$;

(ii) $f^{-1}(\infty) = \{\infty\}$;

(iii) Ω_{K_2} soit régulier ;

(iv) f se prolonge continûment aux bords $\partial\Omega_{K_1} \to \partial\Omega_{K_2}$.

Alors, $\operatorname{Cap}(K_1)>0$, Ω_{K_1} est régulier et

$$g_{K_1}(\cdot, \infty) = \frac{1}{n_f} g_{K_2}(f(\cdot), \infty)$$

$$|A_f| \operatorname{Cap}(K_1)^{n_f} = \operatorname{Cap}(K_2).$$

Démonstration. (a). On peut supposer $\operatorname{Cap}(K_2) > 0$. Alors $g_{K_2}(\cdot, \infty) > 0$ est harmonique sur Ω_{K_2}, donc $g_{K_2}(f(\cdot), \infty) > 0$ est surharmonique (Prop. B.2) sur Ω_{K_1} (d'ailleurs elle sera harmonique lorsque $f^{-1}(\infty) = \{\infty\}$). En outre, on a $g_{K_2}(w, \infty) = \log|w| + V_{K_2} + o(1)$ lorsque $w \to \infty$, par suite,

$$g_{K_2}(f(z), \infty) = \log|f(z)| + V_{K_2} + o(1) = n_f \log|z| + \log|A_f| + V_{K_2} + o(1), \quad z \to \infty$$

Supposons d'abord $\operatorname{Cap}(K_1) > 0$. Définissons

$$h(z) := g_{K_2}(f(z), \infty) - n_f g_{K_1}(z, \infty).$$

Alors h est surharmonique sur Ω_{K_1}, et même sur $\Omega_{K_1} \cup \{\infty\}$ si l'on enlève cette singularité isolée en définissant

$$h(\infty) := \log|A_f| + V_{K_2} - n_f V_{K_1}.$$

Selon Thm. 2.6, $\lim_{z\to\zeta} g_{K_1}(z, \infty) = 0$ pour *q.t.* $\zeta \in \partial\Omega_{K_1}$, donc on a pour *q.t.* $\zeta \in \partial\Omega_{K_1}$

$$\liminf_{z\to\zeta} h(z) \geq 0.$$

Aussi, on a vu que $h(z)$ était bornée dans un voisinage de ∞ ; hors de ce voisinage, $g_{K_1}(\cdot, \infty)$ est borné ; donc $h(z)$ est borné inférieurement. Alors le principe du minimum généralisé entraîne que soit $h(z) \equiv 0$ soit $h(z) > 0$ sur Ω_{K_1}, en particulier

$$h(\infty) = \log|A_f| + V_{K_2} - n_f V_{K_1} \geq 0.$$

Maintenant ne supposons plus $\operatorname{Cap}(K_1) > 0$. Pour $\epsilon > 0$, soit $K_1^\epsilon = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, K_1) \leq \epsilon\}$; alors son intérieur est non vide, donc $\operatorname{Cap}(K_1^\epsilon) > 0$ selon Cor. 2.3(a). Alors $|A_f| \operatorname{Cap}(K_1^\epsilon)^{n_f} \geq \operatorname{Cap}(K_2)$ par ce qui précède. Appliquant Prop. 2.4(d) à la suite $(K_1^{1/n})$, on obtient

$$|A_f| \operatorname{Cap}(K_1)^{n_f} \geq \operatorname{Cap}(K_2)$$

(b). On a $\mathrm{Cap}(K_1) > 0$ par (a). La condition du prolongement par continuité donne que $\lim_{z\to\zeta_0} f(z)$ existe et appartient à Ω_{K_2} pour tout $\zeta_0 \in \partial\Omega_{K_1}$, donc la régularité de Ω_{K_2} entraîne

$$\lim_{z\to\zeta_0} g_{K_2}(f(z),\infty) = 0, \quad \forall \zeta_0 \in \partial\Omega_{K_1}$$

Reprenons les notations dans (a). Rappelons-nous que $h(z)$ est bornée dans un voisinage U de ∞ ; les conditions (ii) et (iv) impliquent que $f(U)$ est contenu dans le complémentaire dans Ω_{K_2} d'un voisinage de ∞, alors $g_{K_2}(f(\cdot),\infty)$ est borné dans $\Omega_{K_1}\backslash U$. On a alors montré que $h(z)$ était une fonction harmonique et bornée sur $\Omega_{K_1} \cup \{\infty\}$ satisfaisant pour *q.t.* $\zeta \in \partial\Omega_{K_1}$

$$\lim_{z\to\zeta} h(z) = 0.$$

En appliquant le principe du minimum généralisé à h et $-h$, on obtient $h(z) \equiv 0$, en particulier $h(\infty) = 0$. Donc, on a

$$V_{K_1} = \frac{1}{n_f}(\log|A_f| + V_{K_2})$$

$$\mathrm{Cap}(K_1) = \left(\frac{\mathrm{Cap}(K_2)}{|A_f|}\right)^{1/n_f}.$$

□

RÉFÉRENCES

[1] Marc Hindry : Géométrie arithmétique. *In Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 2e série*, volume 3, pages 79–84. 1993.

[2] G. Rémond : Conjectures uniformes sur les variétés abéliennes. *Quart.,J. Math.(to appear)*, 2017.

[3] Bertrand et Waldschmidt : Quelques travaux récents en théorie des nombres transcendants. *In Mémoires de la S. M. F. 2e série*, volume 2, pages 107–119. 1980.

[4] Pierre Deligne : La conjecture de weil : I. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 43:273–307, 1974.

[5] J.-P. Serre : Distribution asymptotique des valeurs propres des endomorphismes de Frobenius [d'après Abel, Chebyshev, Robinson, ...]. *Séminaire Bourbaki*, n° 1146, 2018.

[6] Valérie Flammang, Georges Rhin et Qiang wu : The totally real algebraic integers with diameter less than 4. *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*, 1, 01 2011.

[7] Edward B Saff et Vilmos Totik : *Logarithmic potentials with external fields*, volume 316. Springer Science & Business Media, 2013.

[8] Robert Mayans : The chebyshev equioscillation theorem. *The Journal of Online Mathematics and Its Applications*, 6, 2006.

[9] Jean-Benoît Bost : *Introduction to Compact Riemann Surfaces, Jacobians, and Abelian Varieties*, pages 64–211. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1992.

[10] T. Ransford : *Potential theory in the complex plane*, volume 28. Cambridge University Press, 1995.

[11] E. B. Saff : Logarithmic potential theory with applications to approximation theory. *Surveys in Approximation Theory, 5 (2010), 165–200.*

[12] J. I. Burgos Gil et R. Menares : Equidistribución, teoría del potencial y aplicaciones aritméticas. Notes de cours.

[13] M. Tsuji : *Potential theory in modern function theory*, volume 4. Chelsea Publ. Co., New York, 1975.

[14] M. Fekete et G. Szegö : On algebraic equations with integral coefficients whose roots belong to a given point set. *Mathematische Zeitschrift*, 63(1):158–172, 1955.

[15] T. Ransford : Computation of logarithmic capacity. *Computational Methods and Function Theory*, 10(2):555–578, 2011.